UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Problemario de Física I

INTRODUCCIÓN

La presente es un conjunto de problemas tomados de las principales guías que nosotros los estudiantes de física I usamos para su estudio. Tiene como propósito ser una herramienta más para el aprendizaje de una asignatura que suele tornarse “violenta”. De física se dice: “es esa asignatura que crees entenderla y sin embargo los resultados en su mayoría no son favorables”.

Este conjunto de problemas en principio surgió como una simple actividad de recreación ante la poca motivación de escribir con lápiz por parte del autor y por el hecho de que en Word los dibujos, la letra y el orden resulta al alcance de todos. Sin embargo, siempre me preguntaba por qué el estudio de la física, principalmente de física I, es tan traumático para un número elevado de estudiantes. Llegue a la conclusión de que la asignatura en si no es difícil, más cuando el estudiante toma el curso por primera vez, no cuenta con las suficientes herramientas lógico-matemáticas necesarias para el curso. O quizás su maduración no la ha alcanzado. Principalmente a lo relacionado con álgebra vectorial y el cálculo diferencial.

Está de más decir que esta “guía” no remplaza bajo ningún motivo el uso del texto, el uso de este es imprescindible para una correcta compresión de los aspectos teóricos, mi mejor consejo es “LEA EL TEXTO” existe contenido que el profesor de turno no le dirá, usted tendrá que aprender por sí mismo, es su deber hacerse dueño de su crecimiento y aprendizaje.

Este problemario está dirigido aquellos estudiantes que no encuentran una referencia para saber si “lo están haciendo bien” al menos en cuanto a las cuentas se refiere. Aquellos estudiantes que solo la tomen como un atajo para aprender a resolver los problemas, en mi opinión, están destinados al fracaso. No se trata de pasar, se trata de aprender, y aunque soy consciente de que esta guía pueda ser un potencial peligro para aquellos estudiantes incautos que subestimen el arte de pensar, creo firmemente que usted hará uso adecuado de ella. Escribiendo los enunciados, resolviendo los problemas por su cuenta, desarrollando su pensamiento, comparando las respuestas y hallando posible errores que se pudieron pasar por alto. No debe resolver los ejercicios como en esta guía están, no pretendo que copie mi forma de pensar. Desarrolle su propia creatividad. Tiene toda libertad para criticar la guía, agregar más ejercicios, quitar los que no les gusten, copiarla y pegarla donde quiera, regalarla, quemarla, no usarla, ni siquiera ojearla. Es suya, puede hacer con ella lo que guste.

Finalmente, mis más sentidas disculpas por tomar los ejercicios de varias guías y resolverlos sin citar su procedencia. Pero vamos, todos conocemos de donde vienen y el crédito ya lo tienen más que ganado aquellos que como yo solo desean que los demás desarrollen su capacidad creativa y crítica. Espero esto no suponga inconvenientes futuros.

ÁLGEBRA VECTORIAL

A continuación se darán un conjunto de afirmaciones. Decida si es falsa o verdadera.

Afirmación #1 Sean $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ dos vectores arbitrarios no nulos que satisfacen la igualdad.

$$3\vec{A} - 2\vec{B} = 2\vec{A} - 4\vec{B}$$

Entonces ambos vectores son paralelos.

Solución

Dos vectores son paralelos si ambos tienen la misma dirección sin importar su ubicación en el espacio.

Es decir,

$$\vec{A} = \lambda\vec{B}\ con\ \lambda > 0$$

Tomamos la igualdad y sumamos $2\vec{B}$

$$3\vec{A} - 2\vec{B} + 2\vec{B} = 2\vec{A} - 4\vec{B} + 2\vec{B}$$

Simplificamos,

$$3\vec{A} = 2\vec{A} - 2\vec{B}$$

Sumamos $-2\vec{A}$

$$3\vec{A} - 2\vec{A} = 2\vec{A} - 2\vec{B} - 2\vec{A}$$

Simplificamos,

$$\vec{A} = -2\vec{B}$$

Como,

$$\lambda = -2$$

Y,

$$-2 < 0$$

Concluimos que la afirmación es **Falsa.** De hecho los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ son antiparelelos.

Afirmación #2 El menor ángulo entre dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ no nulos es agudo siempre que el producto escalar entre dichos vectores sea negativo.

Solución.

Un ángulo agudo es un ángulo que mide más de 0° y menos de 90°.

Por otro lado el producto escalar entre dos vectores no nulos se define como:

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \ldots\ldots (1)$$

Donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$

Luego, el $\cos\theta < 0$ para ángulos mayores que 90° y menores a 270°

Además, para que la igualdad (1) arroje una cantidad negativa deben ocurrir una de las siguientes tres cosas.

1. Que $A < 0$, $B > 0\ y \cos\theta > 0$
2. Que $B < 0$, $A > 0\ y \cos\theta > 0$
3. Que $\cos\theta < 0$, $A > 0\ y\ B > 0$

Pero $A\ y\ B$ no son números cualesquiera. $A\ y\ B$ Son los módulos de los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ por lo que las opciones 1 y 2 quedan descartadas. Los módulos de un vector no son una cantidad negativa.

Podemos concluir entonces que la afirmación es **<u>Falsa.</u>**

Afirmación #3 El producto escalar entre dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ no nulos es máximo cuando dichos vectores son paralelos.

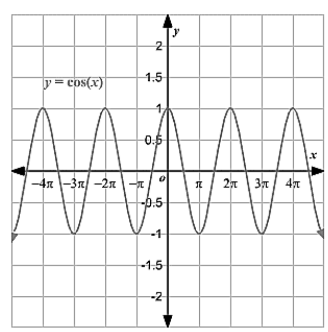
Solución.

Por definición el producto escalar es:

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

El $\cos\theta$ es una función cuyo rango está acotado entre $[1, -1]$

Luego, por la gráfica del coseno vemos que su máximo valor lo toma en $\theta = 0°$



Lo cual concuerda con la condición de dos vectores paralelos.

Así, podemos concluir que la afirmación es **<u>Verdadera.</u>**

Afirmación #4 La igualdad $\vec{A}.\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\right)^2+\vec{A}.\vec{B}$ es considerada como una expresión válida del álgebra vectorial.

Solución.

Observamos dos operaciones involucradas en dicha expresión. Primero, una suma de vectores $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)$ seguido de un producto escalar entre la suma de dichos vectores y el vector $\vec{A}$.

El producto escalar admite la propiedad distributiva, sin embargo. $\vec{A}.\vec{A}\neq\left(\vec{A}\right)^2$

De hecho, $\vec{A}.\vec{A}$ es la definición del módulo del vector $\vec{A}$. Es decir, $\vec{A}.\vec{A}=A.A.\cos\theta$

Pero el ángulo θ que forma un vector consigo mismo es 0° y $\cos 0°=1$.

Por tanto, $\vec{A}.\vec{A}=A.A.1=A^2$

Así, podemos concluir que la afirmación es **<u>Falsa.</u>**

Afirmación #5 El producto vectorial entre dos vectores no colineales da como resultado, de dicha operación, al producto de la norma de ambos vectores multiplicado por el seno del menor ángulo entre dichos vectores. Es decir, $\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\theta$.

Solución.

Dos vectores son colineales si su producto vectorial equivale a cero.

El producto vectorial entre dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ no colineales da como resultado un vector $\vec{C}$ perpendicular a ambos vectores con dirección definida por la regla de la mano derecha y cuyo modulo viene dado por la expresión $\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\theta$.

Luego la afirmación es **<u>Falsa.</u>**

Afirmación #6 La expresión vectorial $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$ se encuentra escrita correctamente.

Solución.

Suponga que pensamos que hace falta el uso de los paréntesis. Podemos escribir la expresión de la forma.

$$\left(\vec{A}.\vec{B}\right)\times\vec{C} \text{ ó } \vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$$

En la primera expresión $\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta=n\ \ con\, n\in\ \mathbb{R}^m$ Luego, la operación $n\times\vec{C}$ no está definida en el álgebra vectorial.

Así la expresión $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$ equivale únicamente a la expresión $\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$

Por tanto, concluimos que la afirmación es **<u>Verdadera</u>**

Afirmación # 7 A veces hablamos de la "dirección del tiempo", del pasado al futuro por tanto el tiempo es un vector.

Solución.

Por definición un vector es un objeto matemático que presenta dos características únicas: modulo y dirección.

Sí te digo, estoy a 10 metros de ti, no sabrás donde estoy. Es necesario darte una dirección. Así, la posición es un vector.

En cambio, si te digo tarde 2 minutos escribiendo esto, ya sabes todo acerca de lo que te quería decir.

Por tanto, el uso de un vector o un escalar depende de la información que se necesita suministrar. Para el caso particular del tiempo, lo podemos hacer tan solo con un escalar.

Luego la afirmación es **Falsa.**

Afirmación #8 En un espacio Euclídeo podemos encontrar un vector cuya magnitud sea cero y sus componentes sean distintas de cero.

Solución.

Suponga un vector de la forma más general posible cuyas componentes se encuentran en una base de vectores unitarios $\hat{x}$ $\hat{y}$ linealmente independiente entre sí no necesariamente ortogonal.

$$\vec{A} = B(\hat{x}) + C(\hat{y})$$

A y B son las componentes del vector $\vec{A}$ y se cumple que $B\ y\ C\ \neq 0$.

Queremos calcular su magnitud.

Por definición, la magnitud de un vector viene dado por el producto escalar del vector consigo mismo.

$$\vec{A}.\vec{A} = A.A\cos\theta$$

Pero el ángulo θ que forma un vector consigo mismo es 0° y $\cos 0° = 1$.

Por tanto,

$$\vec{A}.\vec{A} = A.A.1 = A^2$$

Por otro lado definimos,

$$\vec{A} = B(\hat{x}) + C(\hat{y})$$

Así, podemos expresar el producto punto como:

$$\vec{A}.\vec{A} = \big(B(\hat{x}) + C(\hat{y})\big).\big(B(\hat{x}) + C(\hat{y})\big)$$

Pero,

$$\vec{A}.\vec{A} = A.A.1 = A^2$$

Así,

$$A^2 = \left(B(\hat{x}) + C(\hat{y})\right).\left(B(\hat{x}) + C(\hat{y})\right)$$

Por propiedad distributiva del producto punto.

$$A^2 = B^2(\hat{x}.\hat{x}) + BC(\hat{x}.\hat{y}) + CB(\hat{y}.\hat{x}) + C^2(\hat{y}.\hat{y})$$

$$A^2 = B^2(x^2 \cos\alpha) + BC(xy\cos\theta) + CB(yx\cos\theta) + C^2(y^2\cos\gamma)$$

Como $y = x = 1\ y\ el \cos\alpha = \cos\gamma = 1$

$$A^2 = B^2 + BC(xy\cos\theta) + CB(xy\cos\theta) + C^2$$

Simplificando,

$$A^2 = B^2 + C^2 + 2BC\cos\theta$$

De donde,

$$A = \sqrt{B^2 + C^2 + 2BC\cos\theta}$$

Por condición del enunciado $A = 0$,

Entonces,

$$0 = \sqrt{B^2 + C^2 + 2BC\cos\theta}$$

Si $B\ y\ C\ \neq 0$ entonces se presume la existencia de un ángulo que multiplicado por el término $2BC$ dé como resultado $-(B^2 + C^2)$

Despejamos dicho ángulo,

$$0 = B^2 + C^2 + 2BC\cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{(B^2 + C^2)}{2BC}$$

La expresión,

$$-\frac{(B^2 + C^2)}{2BC} \leq 1$$

Y como el $\cos^{-1}\theta$ tiene dominio $[-1,1]$

No existe valor de θ que cumpla la condición $2BC\cos\theta = -(B^2 + C^2)$

Concluimos que la afirmación es **Falsa.**

Afirmación #9 Sean $\vec{A}\, y\, \vec{B}$ dos vectores no nulos, entonces es posible que tanto $\vec{A}.\vec{B}$ como $\vec{A} \times \vec{B}$ den como resultado cero.

Solución.

Sabemos que,

$$\vec{A}.\vec{B} = 0 \text{ Sí } \vec{A} \perp \vec{B}$$

Sabemos que,

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 \; sí \; \vec{A} \parallel \vec{B}$$

Luego, $\vec{A}$ no puede ser paralelo a $\vec{B}$ y al mismo tiempo perpendicular a $\vec{B}$

Concluimos que la afirmación es **Falsa.**

Afirmación # 10 Sin importar lo que sean $\vec{A}\, y\, \vec{B}$ siempre es posible afirmar que:

$$\vec{A}.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0$$

Solución.

Sabemos que $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ con $\vec{C}$ un vector perpendicular a $\vec{A}\, y\, \vec{B}$ con dirección definida por la regla de la mano derecha y cuyo modulo viene dado por la expresión $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta$.

Así,

$$\vec{A}.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0$$

$$\vec{A}.\vec{C} = 0$$

Por definición del producto escalar,

$$\vec{A}.\vec{C} = AC \cos \theta$$

Entonces,

$$AC \cos \theta = 0$$

Pero como $\vec{C} \perp \vec{A}$ necesariamente $\theta = \frac{\pi}{2}$

Por tanto,

$$0 = 0$$

Concluimos que la afirmación es **Verdadera**

Afirmación #11 Si $\vec{A}.\vec{B} = 0$ necesariamente se concluye que $A = 0$ o $B = 0$.

Solución,

Por definición,

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

Efectivamente, si $A = 0 \ o \ B = 0$ se cumple que $\vec{A}.\vec{B} = 0$.

Sin embargo, existe la opción de que $\vec{A} \perp \vec{B}$ entonces, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Por tanto también se cumpliría que $\vec{A}.\vec{B} = 0$.

Concluimos que la afirmación es **<u>Falsa.</u>**

Afirmación # 12 Sea $\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ entonces, $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{A}$

Solución,

Trabajamos con la igualdad del lado derecho,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \big(-1-(3)\big)(\hat{\imath}) - \big(-2-(-3)\big)(\hat{\jmath}) + \big(2-(-1)\big)\big(\hat{k}\big)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

Trabajamos con la igualdad del lado izquierdo,

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = (3-(-1)(\hat{\imath}) - (-3-(-2)(\hat{\jmath}) + (-1-2)\big(\hat{k}\big)$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

Comparamos,

$$-4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k} \neq 4\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

De hecho,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$$

Concluimos que la afirmación es **<u>Falsa.</u>**

Afirmación # 13 Se $\vec{A} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ con los vectores $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ vectores ortogonales entre sí, podemos decir que un vector unitario, es decir de modulo uno, en la dirección de $\vec{A}$ no es posible de construir mediante la expresión.

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

Solución,

Calculemos el módulo del vector $\vec{A}$

Por definición el módulo de $\vec{A}$ es el producto escalar de $\vec{A}$ consigo mismo.

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2 \cos\theta = A^2$$

Pero,

$$\vec{A} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

Entonces,

$$\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right).\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right) = A^2$$

Por propiedad distributiva del producto punto,

$$1^2 + 1^2 + 1^2 = A^2$$

De donde,

$$A = \sqrt{1+1+1}$$

$$A = \sqrt{3}$$

Entonces según la expresión,

$$\hat{A} = \frac{\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{\jmath} + \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{k}\right)$$

Luego $\hat{A}$ es un vector unitario si su módulo es igual a uno,

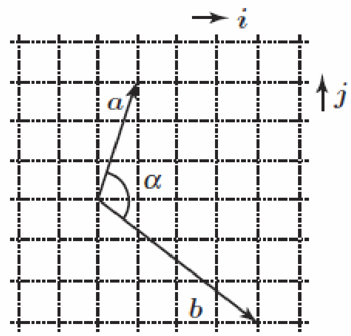
$$A = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = \sqrt{1} = 1$$

Concluimos que la afirmación es **<u>Falsa.</u>**

Ejercicio #1

Las tres preguntas a continuación se refieren a la siguiente situación. En la figura a la derecha se muestran dos vectores en un reticulado plano. La distancia entre cualquiera dos líneas paralelas adyacentes (horizontales o verticales) es de una unidad.



3. El vector $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ es igual a:

A) $3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}$.

B) $5\boldsymbol{i}$.

C) $-3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$.

D) $6\boldsymbol{i}$.

E) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

4. Se cumple que $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{j}$ es igual a:

A) 3.

B) -3.

C) 4.

D) -4.

E) 5.

5. El ángulo α es:

A) $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

B) $\alpha = \arccos\left(\frac{13}{5\sqrt{10}}\right)$.

C) $\alpha = 105°$.

D) $\alpha = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$.

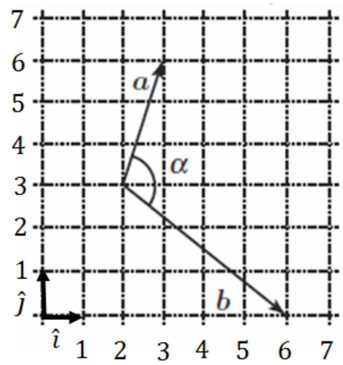
E) $\alpha = \arccos\left(\frac{-13}{5\sqrt{10}}\right)$.

Solución pregunta 3)

Existen varias maneras de realizar este tipo de ejercicios. Ninguna es mejor que otra. Más si algunas formas son más prácticas que otras.

En primer lugar, los vectores son vectores y no dejaran de ser vectores porque lo coloquemos en uno u otro. Una propiedad de los vectores es que pueden ser trasladados en el espacio siempre que no alteremos su módulo y dirección. Suponga que trasladamos los vectores unitarios $\hat{\imath}\,\hat{\jmath}$ al extremo inferior izquierdo de la figura.

Hemos fijado un sistema de referencia. Seguidamente decimos que dicho punto (el extremo inferior izquierdo de la figura) corresponde al origen del sistema de referencia. A partir de allí mediremos todas las magnitudes de los vectores.



La figura quedará como el mostrado a la izquierda.

Algunos libros definen el vector como un segmento de recta dirigido en alguna dirección.

Usando esta definición, todo vector es posible definirlo como la distancia entre dos puntos medido desde la punta hasta la cola del vector. (Eso último le da el carácter de dirección)

Note que la punta del vector $\vec{a}$ esta sobre el punto $p_1 = (3,6)$ y la cola esta sobre el vector $p_2 = (2,3)$

Luego,

$$\vec{a} = p_1 - p_2$$

Es decir,

$$\vec{a} = (3,6) - (2,3)$$

Dos puntos se suman coordenada a coordenada.

$$\vec{a} = (1,3)$$

Análogamente, la punta del vector $\vec{b}$ esta sobre el punto $q_1 = (6,0)$ y la cola sobre el punto $q_2 = (2,3)$

Luego,

$$\vec{b} = q_1 - q_2$$

Es decir,

$$\vec{b} = (6,0) - (2,3)$$

Así,

$$\vec{b} = (4,-3)$$

Luego nos piden el valor de $\vec{a} - \vec{b}$

Pero,

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

$$\vec{a} = (1,3)$$

Y,

$$-\vec{b} = (-4{,}3)$$

Entonces,

$$\vec{a} - \vec{b} = (1{,}3) + (-4{,}3)$$

Simplificamos,

$$\vec{a} - \vec{b} = (-3{,}6)$$

En término de los vectores unitarios $\hat{\imath}\ \hat{\jmath}$

$$\vec{a} - \vec{b} = -3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$$

Solución pregunta 4) Nos piden el valor del producto escalar entre los vectores $\vec{b}\ y\ \hat{\jmath}$

$$\vec{b}.\hat{\jmath} = b.1.\cos\alpha$$

La cuestión es que no conocemos el ángulo entre los vectores.

Usamos la segunda definición de producto escalar.

$$\vec{b}.\hat{\jmath} = (4,-3).(0{,}1)$$

El producto escalar de dos vectores se ejecuta mediante propiedad distributiva componente a componente y se suman todos los productos.

$$\vec{b}.\hat{\jmath} = (4 * 0) + (-3 * 1)$$

Simplificando,

$$\vec{b}.\hat{\jmath} = -3$$

Solución pregunta 5)

Por definición del producto punto.

$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\alpha$$

Dividimos ab a ambos lados de la igualdad.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ab} \ldots\ldots(1)$$

Efectuamos el producto punto entre $\vec{a}\ y\ \vec{b}$

$$\vec{a}.\vec{b} = (1{,}3).(-4{,}3) = -4 + 9 = -5$$

Buscamos los módulos de los vectores $\vec{a}\ y\ \vec{b}$

$$a = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$b = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Sustituyendo en (1)

$$\cos \alpha = -\frac{5}{5\sqrt{10}}$$

Es decir,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Ejercicio #2

7. Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ satisfacen las ecuaciones: $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$,
$-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = +\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.
Se cumple entonces que el módulo de $\boldsymbol{a}$ es igual a

A) 5

B) 2

C) $\sqrt{3}$

D) 1

E) $\sqrt{5}$

Solución. Tomamos las ecuaciones y las sumamos,

$$2\vec{a} - \vec{b} = -\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

$$-\vec{a} + \vec{b} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = -\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

Calculamos el módulo de $\vec{a}$

$$a = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4}$$

$$a = \sqrt{5}$$

Ejercicio #3

8. El vector $\boldsymbol{B}$ de la figura tiene un módulo de 60 cm/s. Su expresión en la base cartesiana y en unidades de m/s es

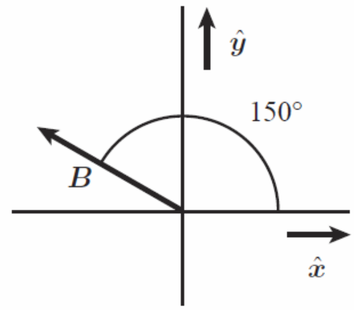
A) $\boldsymbol{B} = (-0.3\sqrt{3}\,\hat{x} + 0.3\,\hat{y})\,m/s$.

B) $\boldsymbol{B} = (-3000\sqrt{3}\,\hat{x} + 3000\,\hat{y})\,m/s$.

C) $\boldsymbol{B} = (-0.3\,\hat{x} + 0.3\sqrt{3}\,\hat{y})\,m/s$.

D) $\boldsymbol{B} = (-3000\,\hat{x} + 3000\sqrt{3}\,\hat{y})\,m/s$.

E) ninguna de las otras opciones.

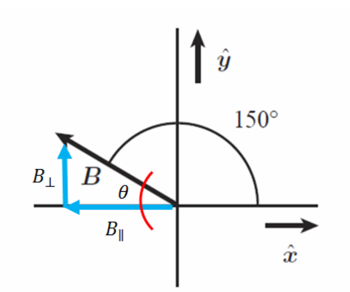


Solución.

Nos piden la respuesta en $\frac{m}{s}$. Pasamos de $\frac{cm}{s}$ a $\frac{m}{s}$

$$60\left(\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right) * \frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}} = \frac{6}{10}\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

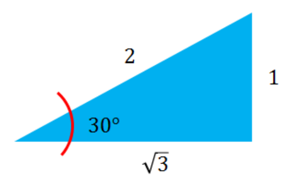
Note que es posible descomponer el vector $\vec{B}$ como la suma de dos vectores $\vec{B}_{\perp} + \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}$



Note además que dicho vectores forman un triángulo rectángulo con

$$\theta = 180° - 150° = 30°$$

Conocemos el triángulo pitagórico,



Luego por trigonometría.

$$\vec{B}_{\perp} = \frac{6}{10}\sin 30°\,(\hat{y})$$

Y,

$$\vec{B}_{\parallel} = \frac{6}{10}\cos 30°\,(-\hat{x})$$

Así,

$$\vec{B} = \vec{B}_{\perp} + \vec{B}_{\parallel} = \frac{6}{10}\sin 30°\,(\hat{y}) + \frac{6}{10}\cos 30°\,(-\hat{x})$$

Sacamos factor común 6/10

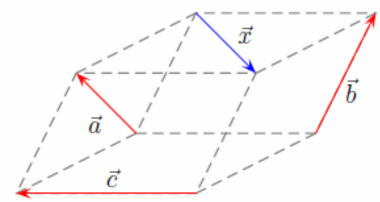
$$\vec{B} = \frac{6}{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(-\hat{x}) + \frac{1}{2}\hat{y}\right)$$

Simplificando,

$$\vec{B} = \frac{3}{10}\left(\sqrt{3}(-\hat{x}) + \hat{y}\right)\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

Ejercicio #4

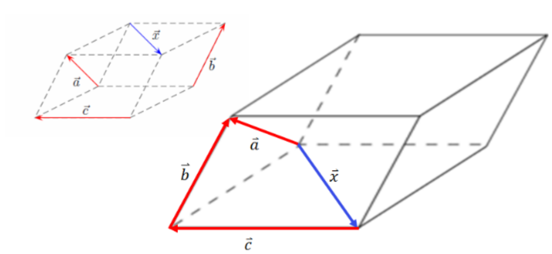
2. (2 puntos) El vector $\vec{x}$ ubicado en la diagonal de la tapa superior del paralelepípedo, indicado en la figura adjunta, se expresa en términos de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como:
   - ( ) $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$;
   - ( ) $\vec{x} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;
   - ( ) $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;
   - ( ) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$;
   - ( ) $\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Solución.

Recuerde que podemos trasladar los vectores siempre que no alteremos su magnitud y dirección.

Luego,



Se cumple que:

$$\vec{x} + \vec{c} + \vec{b} - \vec{a} = 0$$

Despejamos $\vec{x}$

$$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

Ejercicio #5

16. Sean los vectores $\boldsymbol{A} = (a\,\hat{\boldsymbol{x}} - 3a\,\hat{\boldsymbol{y}} + 4\,\hat{\boldsymbol{z}})$ y $\boldsymbol{B} = (-a\,\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}})$. Se cumple que

A) $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares sólo si $a = 5/3$.

B) $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares sólo si $a = 2$ o $a = -2$.

C) no existe valor de a para el cual $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ sean perpendiculares.

D) $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares sólo si $a = 1$ o $a = -4$.

E) $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares si $a = 0$.

Solución.

Note que en todas las posibles soluciones se repite la palabra perpendicular. Es decir, nos están invitando a realizar el producto punto y la propiedad que indica que:

$$\vec{A} \perp \vec{B} \; si \; \vec{A}.\vec{B} = 0$$

Realizamos el producto punto.

$$\vec{A}.\vec{B} = (a\hat{x} - 3a\hat{y} + 4\hat{z}).(-a\hat{x} + \hat{z})$$

Pero,

$$\hat{x}.\hat{x} = x.x.\cos\alpha = 1 * 1 * 1 = 1$$

$$\hat{x}.\hat{z} = x.z.\cos\alpha = 1 * 1 * 0 = 0$$

$$\hat{y}.\hat{x} = y.x.\cos\alpha = 1 * 1 * 0 = 0$$

$$\hat{y}.\hat{z} = y.z.\cos\alpha = 1 * 1 * 0 = 0$$

$$\hat{z}.\hat{z} = z.z.\cos\alpha = 1 * 1 * 1 = 1$$

$$\vec{A}.\vec{B} = -a^2(\hat{x}.\hat{x}) + a(\hat{x}.\hat{z}) - 3a^2(\hat{y}.\hat{x}) - 3a^2(\hat{y}.\hat{z}) - 4(\hat{z}.\hat{z})$$

$$\vec{A}.\vec{B} = -a^2 - 4$$

Pero para que los vectores sean perpendiculares,

$$\vec{A} \perp \vec{B} \; si \; \vec{A}.\vec{B} = 0$$

Así,

$$0 = -a^2 - 4$$

De donde,

$$a = \pm 2$$

Ejercicio #6

9. Sea G un vector de módulo 4, de componentes positivas y tal que forma el mismo ángulo con cada eje cartesiano ($\theta_x = \theta_y = \theta_z$). Se cumple entonces que

A) $G = 2\sqrt{2}(\hat{u}_x + \hat{u}_y + \hat{u}_z)$

B) $G = (4\sqrt{3}/3)(\hat{u}_x + \hat{u}_y + \hat{u}_z)$

C) $G = (\hat{u}_x + \hat{u}_y + \hat{u}_z)$

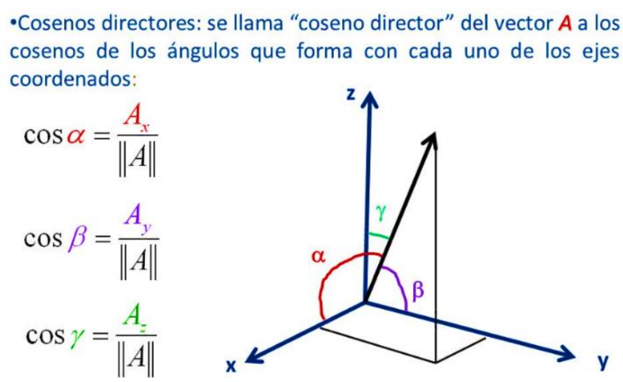
D) $G = (4/3)(\hat{u}_x + \hat{u}_y + \hat{u}_z)$

E) ninguna de las otras 4 opciones es cierta

Solución. Usaremos la definición de cosenos directores.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Donde alfa, beta y gamma son los ángulos con cada eje cartesiano de un vector en 3D.



Por condición del problema nos dicen que:

$$\alpha = \beta = \gamma = \theta$$

Luego la ecuación (1) se puede reescribir como:

$$\cos^2\theta + \cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Entonces,

$$3\cos^2\theta = 1$$

Dividimos entre 3 ambos lados de la igualdad.

$$\cos^2\theta = \frac{1}{3}$$

Operador raíz a ambos lados de la igualdad,

$$\sqrt{\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$|\cos\theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Finalmente,

$$\vec{G} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\hat{u}_x + \hat{u}_y + \hat{u}_z\right)$$

Ejercicio #7

10. El vector $\boldsymbol{A}$ tiene módulo 4, sus componentes x e y son del mismo tamaño pero opuestas, cumple con $\theta_z = 30°$ y $0 < \theta_x < \theta_y$ donde θ_x, θ_y, θ_z son los ángulos entre $\boldsymbol{A}$ y los semiejes positivos x, y, z respectivamente. El vector $\boldsymbol{A}$ es igual a:

A) $-\sqrt{2}\hat{u}_x + \sqrt{2}\hat{u}_y + 2\sqrt{3}\hat{u}_z$

B) $\sqrt{6}\hat{u}_x - \sqrt{6}\hat{u}_y + 2\hat{u}_z$

C) $2\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 2\sqrt{3}\hat{u}_z$

D) $\sqrt{2}\hat{u}_x - \sqrt{2}\hat{u}_y + 2\sqrt{3}\hat{u}_z$

E) $-2\sqrt{3}\hat{u}_x + 2\sqrt{3}\hat{u}_y + 2\hat{u}_z$

Solución.

Nos dicen que $A = 4$, que el ángulo que hace el vector con el eje z es $\theta_z = 30°$, se cumple que $0 < \theta_x < \theta_y$ y además las componentes x e y del vector A tienen el mismo tamaño pero opuestas.

El vector $\vec{A}$ en general puede escribirse como:

$$\vec{A} = A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z$$

Es claro que la componente z del vector viene dado por la expresión según la definición de los cosenos directores.

$$A_z = A\cos\theta_z$$

Es decir,

$$A_z = 4\cos 30° = 2\sqrt{3} \ldots\ldots(1)$$

Por otro lado nos dicen que las componentes x e y del vector A tienen el mismo tamaño pero opuestas. Esto se puede escribir como:

$$\vec{A}_x = -\vec{A}_y$$

De donde,

$$A_x = A_y = A_\circ \ldots\ldots(2)$$

Queremos calcular el módulo de A,

$$A = \sqrt{(A_x)^2 + \left(A_y\right)^2 + (A_z)^2} \ldots\ldots(3)$$

Sustituimos (1) y (2) en (3)

$$A = \sqrt{(A_\circ)^2 + (A_\circ)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}$$

Por enunciado del ejercicio $A = 4$

Entonces,

$$4 = \sqrt{(A_\circ)^2 + (A_\circ)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}$$

Despejamos $A_\circ$

$$4 = \sqrt{2(A_\circ)^2 + 12}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad,

$$16 = 2(A_\circ)^2 + 12$$

Sumamos -12 a ambos lados de la igualdad,

$$4 = 2(A_\circ)^2$$

Dividimos por 2 toda la ecuación,

$$2 = (A_\circ)^2$$

Operador raíz a ambos lados de la igualdad,

$$\sqrt{2} = |A_\circ|$$

Definición del valor absoluto,

$$A_\circ = \pm\sqrt{2}$$

Luego el vector A puede ser escrito de la siguiente dos maneras,

$$\vec{A} = \sqrt{2}\hat{u}_x - \sqrt{2}\hat{u}_y + 2\sqrt{3}\hat{u}_z$$

$$\vec{A} = -\sqrt{2}\hat{u}_x + \sqrt{2}\hat{u}_y + 2\sqrt{3}\hat{u}_z$$

¿Cuál escogemos? Y escogemos el que es correcto y cumple con la condición $0 < \theta_x < \theta_y$

Usando la definición de cosenos directores,

$$\cos\theta_x = \frac{A_x}{A} \to \theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\theta_y = \frac{A_y}{A} \to \theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Claramente $\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{4}$

Luego,

$$\vec{A} = \sqrt{2}\hat{u}_x - \sqrt{2}\hat{u}_y + 2\sqrt{3}\hat{u}_z$$

Ejercicio #8

4. (2 puntos) Un hexágono regular está inscrito en un círculo de radio R, tal como se indica en la figura adjunta. En dicha figura se muestran los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el producto escalar entre ambos vectores viene dado por la expresión:

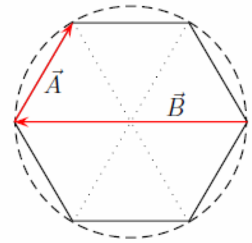
( ) $\sqrt{3}R^2$;

( ) $-R^2$;

( ) $-\sqrt{3}R^2$;

( ) R^2;

( ) Estas respuestas no corresponden al resultado. El resultado es:_________________________.



Solución.

Por definición del producto escalar,

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

Note que dentro del hexágono conviven seis triángulos equiláteros. El triángulo equilátero se caracteriza por tener todos sus ángulos y lados iguales. Además, la suma todos los ángulos internos de un triángulo debe dar 180°. Por tanto, el ángulo entre los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ mide 60°.

Por otro lado, es claro que $B = 2R\ y\ A = R$

Así,

$$\vec{A}.\vec{B} = R.2R.\cos 60°$$

$$\vec{A}.\vec{B} = R^2$$

Ejercicio #9

4. La expresión en cartesianas del vector de la figura es

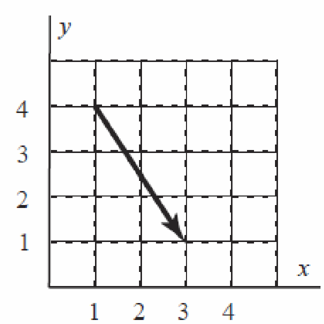
A) $-2i + 3j$

B) $+3i - 2j$

C) $+3i + j$

D) $+2i - 3j$

E) $+3i + 4j$



Solución. Punta $p_1 = (3,1)$, cola $p_2 = (1,4)$. Entonces, punta menos cola ☺ $\vec{A} = p_1 - p_2$

Es decir,

$$\vec{A} = (2, -3)$$

Ejercicio #10

28. Halle el vector $\boldsymbol{A}$ que tiene módulo 2 km/h y es paralelo al vector $\boldsymbol{D} = (4\boldsymbol{i}\sqrt{3}\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k})$ cm.

Solución.

Hallamos un vector unitario en la dirección de $\vec{D}$ mediante la expresión,

$$\hat{D} = \frac{\vec{D}}{D}$$

Buscamos el módulo de $\vec{D}$

$$D = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 3 + 1} = \sqrt{20}$$

$$D = 2\sqrt{5}$$

Entonces,

$$\hat{D} = \frac{4\hat{\imath} + \sqrt{3}\hat{\jmath} + \hat{k}}{2\sqrt{5}}$$

Escribimos,

$$\vec{A} = A\hat{D}$$

$$\vec{A} = 2\left(\frac{4\hat{\imath} + \sqrt{3}\hat{\jmath} + \hat{k}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$$

Simplificamos,

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(4\hat{\imath} + \sqrt{3}\hat{\jmath} + \hat{k}\right)\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$$

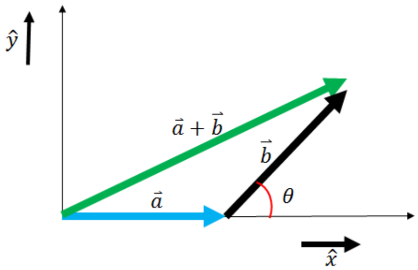
Ejercicio #11

9. (3 puntos) La norma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son 10 y 15, respectivamente. Si la norma de la suma de ambos vectores es 20, el seno del menor ángulo entre dicho vectores viene dado por:
   ( ) $\frac{1}{4}$;
   ( ) $\frac{\sqrt{15}}{2}$;
   ( ) $\frac{\sqrt{15}}{4}$;
   ( ) $\frac{1}{2}$;
   ( ) Estas respuestas no corresponden al resultado. El resultado es:__________________________.

Solución.

Los datos que nos ofrece el problema son los siguientes: $a = 10$, $b = 15$ y $a + b = 20$. Podríamos hacer este ejercicio armando un triángulo de lados a, b, c y usar el teorema del coseno para conseguir el ángulo en cuestión. Sin embargo, dicho planteamiento se hace a través de geometría elemental y lo que estamos estudiando es álgebra vectorial. No confunda las cosas.

Considere el siguiente arreglo de dos vectores en un sistema de referencia.



Es claro que con este arreglo podemos descomponer los vectores de la siguiente manera.

$$\vec{a} = 10\hat{x}$$

$$\vec{b} = 15(\cos\theta(\hat{x}) + \sin\theta(\hat{y}))$$

Así,

$$\vec{a} + \vec{b} = (10 + 15\cos\theta)\hat{x} + 15\sin\theta\,\hat{y}$$

Realizamos el producto escalar $(\vec{a} + \vec{b}).(\,\vec{a} + \vec{b})$

$$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b}) = [(10 + 15\cos\theta)\hat{x} + 15\sin\theta\,\hat{y}].[(10 + 15\cos\theta)\hat{x} + 15\sin\theta\,\hat{y}]$$

Por definición el producto escalar de un vector consigo mismo es el modulo del vector.

$$a + b = \sqrt{(10 + 15\cos\theta)^2 + (15\sin\theta)^2}$$

Además $a + b = 20$

$$20 = \sqrt{(10 + 15\cos\theta)^2 + (15\sin\theta)^2}$$

Desarrollamos el producto notable,

$$20 = \sqrt{100 + 300\cos\theta + 225\cos^2\theta + 225\sin^2\theta}$$

Tomamos factor común 225,

$$20 = \sqrt{100 + 300\cos\theta + 225\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

Por Pitágoras $(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1$,

$$20 = \sqrt{100 + 300\cos\theta + 225}$$

Simplificamos,

$$20 = \sqrt{300\cos\theta + 325}$$

Elevamos al cuadrado,

$$400 = 300\cos\theta + 325$$

Sumamos -325 a ambos lados de la igualdad,

$$75 = 300\cos\theta$$

Dividimos por 300 ambos lados de la igualdad,

$$\frac{75}{300} = \cos\theta$$

Simplificamos,

$$\frac{1}{4} = \cos\theta$$

Puesto que nos están preguntando por el seno usamos la identidad trigonométrica,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Restamos $\cos^2\theta$ ambos lados de la identidad,

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

Usamos el operador raíz ambos lados de la igualdad,

$$|\sin\theta| = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

Sustituimos el valor del coseno hallado,

$$|\sin\theta| = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

Usamos las propiedades de potencia y suma de fracciones,

$$|\sin\theta| = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{16}\right)}$$

Desarrollamos,

$$|\sin\theta| = \sqrt{\frac{16-1}{16}}$$

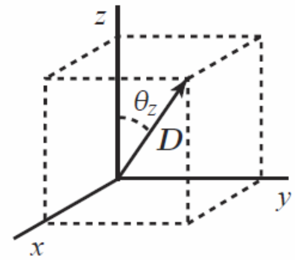
$$|\sin\theta| = \sqrt{\frac{15}{16}}$$

Finalmente,

$$|\sin\theta| = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Ejercicio #12

30. Halle el ángulo que forman la arista y la diagonal de un cubo que parten del mismo vértice.



Solución.

Una propiedad de los cubos es que todos sus lados tienen la misma longitud. Suponga una longitud L.

Luego es posible escribir el vector $\vec{D}$ como:

$$\vec{D} = L\hat{x} + L\hat{y} + L\hat{z}$$

Realizamos el producto escalar $\vec{D}.\hat{z}$

Esto es,

$$\vec{D}.\hat{z} = Dz\cos\theta_z$$

Dividiendo a ambos lados de la igualdad por Dz

$$\frac{\vec{D}.\hat{z}}{Dz} = \cos\theta_z \ldots\ldots (1)$$

Calculamos el módulo del vector $\vec{D}$,

$$D = \sqrt{L^2 + L^2 + L^2} = \sqrt{3L^2} = L\sqrt{3}$$

Realizamos el producto punto $\vec{D}.\hat{z}$

$$\vec{D}.\hat{z} = (L\hat{x} + L\hat{y} + L\hat{z}).(\hat{z}) = L$$

Sustituyendo en (1)

$$\frac{L}{L\sqrt{3} * 1} = \cos\theta_z$$

Simplificando,

$$\cos\theta_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 54{,}7°$$

Ejercicio #13

38. Sean los vectores $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Calcule las componentes A_x y A_y sabiendo que el producto vectorial $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ está en el plano xy y $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 5$.

Solución.

Lo importante de estos ejercicios es interpretar correctamente los enunciados y establecer relaciones que nos permitan calcular lo solicitado,

Inicialmente realizamos el producto vectorial de $\vec{A}\ y\ \vec{B}$,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculando del determinante,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y)(\hat{\imath}) - (A_x)(\hat{\jmath}) + (-2A_x - A_y)(\hat{k})$$

Lo importante de este resultado es la condición que indica que $\vec{A} \times \vec{B}$ está en el plano xy. Esto nos está diciendo "la componente $\hat{k}$ es igual a cero".

Es decir,

$$-2A_x - A_y = 0 \dots \dots (1)$$

Por otro lado, el ejercicio nos ofrece información sobre el producto escalar. $\vec{A}.\vec{B} = 5$. Realizamos el producto escalar,

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}).(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k})$$

Así,

$$5 = A_x - 2A_y \dots \dots (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) formamos un sistema de ecuaciones,

$$-2A_x - A_y = 0 \quad \dots \dots (1)$$

$$A_x - 2A_y = 5 \quad \dots \dots (2)$$

Tomamos la ecuación (2) y la multiplicamos por 2 y sumamos ambas ecuaciones,

$$-2A_x - A_y = 0 \quad \dots \dots (1)$$

$$2A_x - 4A_y = 10 \quad \dots \dots (2)$$

$$-5A_y = 10 \dots \dots (3)$$

Tomamos la ecuación (3) y dividimos por -5 ambos lados,

$$A_y = -2$$

Sustituimos en (1),

$$-2A_x - (-2) = 0$$

Simplificamos,

$$-2A_x + 2 = 0$$

Sumamos -2 a toda la ecuación.

$$-2A_x = -2$$

Dividimos toda la ecuación por -2

$$A_x = 1$$

Ejercicio #14

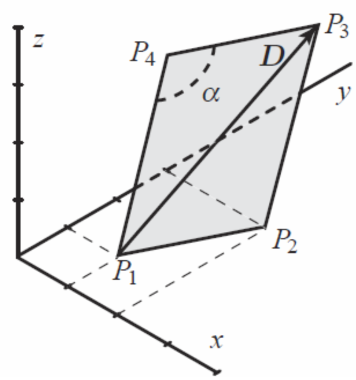
35. La figura muestra un paralelogramo con vértices en los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4. Se conocen las coordenadas cartesianas de los puntos P_1 y P_2, y las componentes del vector $\boldsymbol{D}$:

$$P_1 = (1,1,0)\,, \quad P_2 = (2,3,0)\,, \quad \boldsymbol{D} = \hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} + 3\hat{\boldsymbol{z}}\,.$$

a. Se definen los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, el primero parte de P_1 y llega a P_2 y el segundo parte de P_4 y llega a P_1. Encuentre las componentes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

b. Halle las coordenadas de los puntos P_3 y P_4.

c. Halle el ángulo α.



Solución.

En este ejercicio usaremos eso que dice “punta menos cola”.

En el punto a nos dicen que,

$$\vec{a} = p_2 - p_1$$

Es decir,

$$\vec{a} = (2,3,0) - (1,1,0)$$

Así,

$$\vec{a} = (1,2,0)$$

Definimos el vector,

$$\vec{c} = p_3 - p_2 \ldots \ldots (1)$$

Se cumple que,

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{D}$$

Sumamos $-\vec{a}$ ambos lados de la igualdad,

$$\vec{c} = \vec{D} - \vec{a} \ldots \ldots (2)$$

Igualamos (1) y (2)

$$\vec{D} - \vec{a} = p_3 - p_2$$

Sustituimos los valores de $\vec{D}\ y\ \vec{a}$

$$(1,3,3) - (1,2,0) = p_3 - (2,3,0)$$

Sumamos $(2,3,0)$ ambos lados de la igualdad,

$$(1,3,3) - (1,2,0) + (2,3,0) = p_3$$

Así,

$$p_3 = (2,4,3)$$

Note que los vectores $\vec{c}\ y\ \vec{b}$ tienen el mismo modulo y dirección opuesta. Luego, es posible construir la ecuación,

$$\vec{c} = -\vec{b}$$

Pero,

$$\vec{c} = p_3 - p_2 \ \text{ y } -\vec{b} = p_4 - p_1$$

Entonces,

$$p_3 - p_2 = p_4 - p_1$$

Sumamos p_1 ambos lados de la igualdad,

$$p_3 - p_2 + p_1 = p_4$$

Sustituyendo los valores conocidos,

$$(2,4,3) - (2,3,0) + (1,1,0) = p_4$$

De aquí que,

$$p_4 = (1,2,3)$$

Podemos entonces calcular las componentes del vector $\vec{b}$

$$\vec{b} = p_1 - p_4$$

Sustituyendo,

$$\vec{b} = (1,1,0) - (1,2,3)$$

Finalmente,

$$\vec{b} = (0,-1,-3)$$

Para hallar el ángulo α basta con definir el vector $\vec{e} = p_3 - p_4$ y realizar el producto escalar $\vec{b}.\vec{e}$.

Por definición,

$$\vec{b}.\vec{e} = be\cos\alpha$$

Dividiendo toda la ecuación por be,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{b}.\vec{e}}{be}$$

Aplicando el inverso del coseno,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{b}.\vec{e}}{be}\right)$$

Calculamos el vector $\vec{e}$,

$$\vec{e} = p_3 - p_4$$

Sustituyendo los valores conocidos,

$$\vec{e} = (2,4,3) - (1,2,3)$$

Desarrollando,

$$\vec{e} = (1,2,0)$$

Calculamos el módulo del vector $\vec{e}$,

$$e = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

Calculamos el módulo del vector $\vec{b}$,

$$b = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

Efectuamos el producto escalar $\vec{b}.\vec{e}$,

$$\vec{b}.\vec{e} = (0,-1,-3).(1,2,0) = 0 - 2 - 0 = -2$$

Finalmente,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{10}\sqrt{5}}\right)$$

Esto es,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{50}}\right)$$

Simplificando,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$\alpha \approx 106°$$

Propiedades del producto escalar

i) $\vec{A}.\vec{B} = N, \text{con } N \in \mathbb{R}^m$
ii) $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$
iii) $\vec{A}.\vec{B} = 0, \text{entoces} : A = 0, B = 0, \vec{A} \perp \vec{B}$
iv) $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
v) $|\vec{A}.\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|$
vi) $\vec{C}.(\vec{A}+\vec{B}) = (\vec{C}+\vec{A}).\vec{B}$
vii) $c(\vec{A}.\vec{B}) = (c\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(c\vec{B})$, con $c \in \mathbb{R}^m$

Propiedades del producto vectorial

i) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$
ii) $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$
iii) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$
iv) $\vec{A}.(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}.(\vec{B} \times \vec{A}) = 0$
v) $\vec{A} \times \vec{B} = 0, \text{entonces:} A = 0, B = 0, \vec{A} \parallel \vec{B}$
vi) $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta = $ Área del paralelogramo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$
vii) $|\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})| = $ Volumen del paralelepipedo formado por $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$

Nota: El álgebra vectorial usted lo comprenderá a profundidad cuando tome el curso matemáticas III. Por ahora, es importante familiarizarse con la parte operativa del álgebra para sacar adelante el curso de física I. Su manejo es imprescindible en este curso. Practique. Busque ejercicios, pregúntele al profesor, intercambie ejercicios con sus amigos. Etc.

Problema #1

49. Una partícula tiene vector posición $\boldsymbol{r} = 4t^3\,\boldsymbol{i} - 5\,\boldsymbol{j} + 2t^4\,\boldsymbol{k}$ donde t es el tiempo (todas las unidades pertenecen al SI). Su velocidad al instante $t = 1$ s es

A) $\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + (2/5)\boldsymbol{k}$

B) $4\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

C) $12\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$

D) $4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$

E) $12\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{k}$

Solución.

Es conocido que,

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$$

Entonces,

$$\frac{d}{dt}\left(4t^3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2t^4\hat{k}\right) = \vec{v}(t)$$

Así,

$$\vec{v}(t) = 12t^2\hat{\imath} + 8t^3\hat{k}$$

Evaluamos para $t = 1s$

$$\vec{v}(t = 1s) = 12(1)^2\hat{\imath} + 8(1)^3\hat{k}$$

Finalmente,

$$\vec{v}(t = 1s) = 12\hat{\imath} + 8\hat{k}$$

Problema #2

63. La figura muestra dos pelotas bajo la influencia de la gravedad terrestre. La #1 cae y su aceleración es $\boldsymbol{a}_1$, la #2 está subiendo y su aceleración es $\boldsymbol{a}_2$. Se ha llamado $\boldsymbol{k}$ al vector unitario que apunta hacia arriba y g a la aceleración de gravedad. Se cumple que

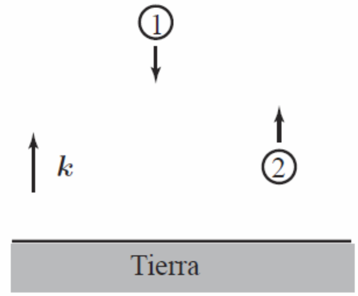
A) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = -g\boldsymbol{k}$.

B) $\boldsymbol{a}_1 = g\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{a}_2 = -g\boldsymbol{k}$.

C) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = g\boldsymbol{k}$.

D) $\boldsymbol{a}_1 = -g\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{a}_2 = +g\boldsymbol{k}$.

E) ninguna de las otras 4 opciones es cierta.



Solución: Independientemente de si sube o baja. El vector aceleración es un vector de modulo $\approx 10\left(\frac{m}{s^2}\right)$ y dirección hacia el centro de la tierra. Luego la única opción posible es la A.

Problema #3

55. Una partícula parte del origen y se mueve sobre el eje x con una velocidad cuya componente v_x en función del tiempo se muestra en la gráfica (las unidades pertenecen al SI). El desplazamiento en metros de la partícula luego de los primeros 2 segundos es

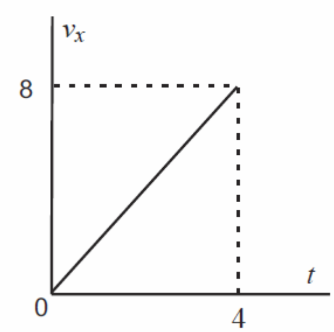
A) 4

B) 16

C) 1

D) 8

E) ninguno de los anteriores



Solución.

Por definición el desplazamiento es:

$$D = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt \ldots \ldots . . (1)$$

Hallamos la expresión analítica de la velocidad mediante la ecuación punto pendiente,

Esto es, hallar la recta que pasa por los puntos $p1(4{,}8)\ y\ \ p2\ (0{,}0)$.

$$v - v_1 = m(t - t_1), con\ m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$m = \frac{8-0}{4-0} = \frac{8}{4} = 2$$

Con $m = 2$ y el punto $p2(0,0)$ se arma la ecuación que describe la velocidad para todo tiempo comprendido en $0 \leq t \leq 4$. Esto es:

$$v - 0 = 2(t - 0)$$

$$v = 2t \ldots\ldots\ldots..(2)$$

Sustituimos (2) en (1)

$$D = \int_0^2 2t\, dt$$

Integramos,

$$D = t^2\Big|_0^2$$

Usamos el teorema fundamental del cálculo,

$$D = 2^2 - 0^2$$

Finalmente,

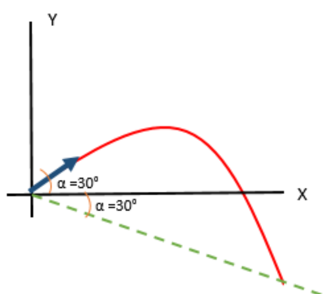
$$D = 4$$

Problema #4

En un campo de golf inclinado 30° debajo de la horizontal un jugador golpea una pelota que sale con una rapidez de 20 m/s formando un ángulo α = 30° con la horizontal.

a) Calcule la velocidad de la pelota para t= 0.5 s
b) Calcule la distancia sobre el campo de golf a la que caerá la pelota.

Solución Parte A



Descomponemos el vector velocidad.

$$\vec{v}(t = 0s) = 20\,[\text{Cos}(30°)\,\hat{\imath} + Sen(30°)\hat{\jmath}]\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\vec{v}(t = 0s) = \left(10\sqrt{3}\,\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}\right)\left(\frac{m}{s}\right)$$

Por definición, la derivada de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración.

$$\frac{d\vec{v}}{dT} = \vec{a} \ldots\ldots\ldots(1)$$

En este caso conocemos la aceleración pues la pelota está bajo los efectos de la fuerza de gravedad,

$$\vec{a}(t) = g(-\hat{\jmath})\left(\frac{m}{s}\right), \ con\ g \approx 10\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Debemos despejar la velocidad de la expresión (1).

Multiplicamos dT a ambos lados de la igualdad.

$$d\vec{v} = \vec{a}\ dT$$

Integramos a ambos lados de la igualdad desde un tiempo t_0 conocido hasta un tiempo t cualquiera.

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a} dT$$

El teorema fundamental del cálculo, en su segunda parte nos dice, palabras más palabras menos, que "la integral es la operación inversa de la derivada", es decir:

$$\int d = 1$$

Así,

$$\vec{v}\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \vec{a} dT$$

Usando el teorema fundamental del cálculo del lado derecho de la ecuación,

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\ dT$$

Sumando $\vec{v}(t_0)$ a ambos lados de la igualdad,

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\ dT + \vec{v}(t_0) \ldots\ldots.. (2)$$

La ecuación (2) es la expresión más general de la velocidad a expensas de conocer la aceleración. Esta ecuación nos está diciendo: La velocidad para todo tiempo de "la pelota de golf" es la integral de la aceleración desde un tiempo t_0 conocido hasta un tiempo t cualquiera, más la velocidad de la pelota en el tiempo t_0.

En nuestro caso particular,

$$t_0 = 0\ , \vec{a} = g(-\hat{\jmath})\left(\frac{m}{s^2}\right)\ y\ \vec{v}(t_0) = \left(10\sqrt{3}\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}\right)\left(\frac{m}{s}\right)$$

Sustituyendo,

$$\vec{v}(t) = \int_0^t g(-\hat{j})\, dT + \left(10\sqrt{3}\hat{\imath} + 10\hat{j}\right)$$

Note que en nuestro caso particular $g(-\hat{j})$ son constantes. Luego por las propiedades de linealidad de la integral las constantes “salen” del operador integral.

$$\vec{v}(t) = g(-\hat{j}) \int_0^t dT + \left(10\sqrt{3}\hat{\imath} + 10\hat{j}\right)$$

Integramos,

$$\vec{v}(t) = g(-\hat{j})T\Big|_0^t + \left(10\sqrt{3}\hat{\imath} + 10\hat{j}\right)$$

Usamos el teorema fundamental del cálculo,

$$\vec{v}(t) = g(-\hat{j})(t-0) + \left(10\sqrt{3}\hat{\imath} + 10\hat{j}\right)$$

Reacomodamos,

$$\vec{v}(t) = \left(10\sqrt{3}\hat{\imath} + (10 - gt)\hat{j}\right)\left(\frac{m}{s}\right) \ldots \ldots (3)$$

La ecuación (3) es la expresión que define la velocidad de la pelota para cualquier instante de tiempo.

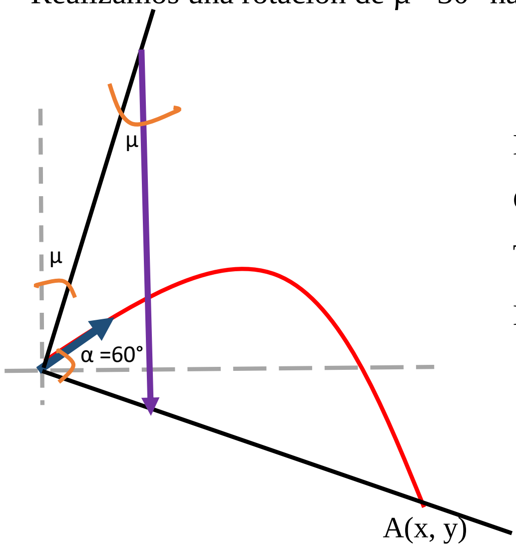
Con la velocidad para todo tiempo procedemos a calcular la velocidad de la pelota para el tiempo solicitado $t = 0.5\ s$

$$\vec{v}\left(t = \frac{1}{2}s\right) = 10\sqrt{3}\hat{\imath} + \left(10 - 10\left(\frac{1}{2}\right)\right)\hat{j}\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\vec{v}\left(t = \frac{1}{2}s\right) = 10\sqrt{3}\hat{\imath} + 5\hat{j}\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Solución Parte B)

Realizamos una rotación de µ= 30° hacia la derecha del Sistema de referencia (SR)



Note que el vector fuerza de gravedad sigue siendo un vector dirigido al Centro de la tierra. Sin embargo, al rotar el S.R.30° hacia la derecha este Tendrá componentes tanto en el eje x como en el eje y.

Luego, $\vec{g} = g_x\hat{\imath} - g_y\hat{\jmath}\ (\frac{m}{s^2}) \Rightarrow g = 10\ [Sen\ (30°)\hat{\imath} - Cos(30°)\hat{\jmath}]$

$$\vec{g} = 5\hat{\imath} - 5\sqrt{3}\hat{\jmath}\ (\frac{m}{s^2})$$

La velocidad inicial también se ve afectada en nuestro nuevo sistema de referencia:

$$\vec{v}(t = 0s) = 20[\cos(60°)\,\hat{\imath} + Sen(60°)\hat{\jmath}]\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\vec{v}(t = 0s) = 10\hat{\imath} + 10\sqrt{3}\hat{\jmath}\ (\frac{m}{s})$$

Con la aceleración para todo tiempo y la velocidad conocida en un instante de tiempo podemos hallar la velocidad para todo tiempo usando la ecuación (2) deducida en la parte A.

Así,

$$\vec{v}(t) = \int_{t=0s}^{t} \vec{a}dT + \vec{v}(t = 0s)$$

Sustituyendo,

$$\vec{v}(t) = \int_0^t (5\hat{\imath} - 5\sqrt{3}\hat{\jmath})dT + 10\hat{\imath} + 10\sqrt{3}\hat{\jmath}\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Integramos,

$$v(t) = \left[(5\hat{\imath} - 5\sqrt{3}\hat{\jmath})T\Big|_0^t + 10\ i + 10\sqrt{3}\hat{\jmath}\right]\left(\frac{m}{s}\right)$$

Usamos el teorema fundamental del cálculo,

$$v(t) = [(5\hat{\imath} - 5\sqrt{3}\hat{\jmath})(t - 0) + 10\ i + 10\sqrt{3}\hat{\jmath}]\left(\frac{m}{s}\right)$$

Reacomodamos,

$$v(t) = [(10 + 5t)\hat{\imath} + (10\sqrt{3} - 5\sqrt{3}t)\hat{\jmath}]\ \left(\frac{m}{s}\right) \ldots\ldots (4)$$

Nota: La ecuación (3) y (4) son equivalentes entre sí vistos por observadores distintos, es decir, cada observador ha descrito la velocidad de la particular desde su particular sistema de referencia. Más adelante en el curso verá un tema llamado “transformaciones de galileo” donde le dirán que todo es relativo al observador. Sin embargo, las cantidades físicas no dependen del observador. Le invito a que calcule usando las expresiones (3) y (4) la rapidez que tiene la pelota en el instante $t = 0.5$ como prueba de ello.

Ahora bien, por definición, la derivada de la posición con respecto al tiempo es la velocidad.

$$\frac{d\vec{r}}{dT} = \vec{v} \ldots\ldots\ldots (5)$$

Debemos despejar la posición de la expresión (5).

Multiplicamos dT a ambos lados de la igualdad.

$$d\vec{r} = \vec{v}\, dT$$

Integramos a ambos lados de la igualdad desde un tiempo t_0 conocido hasta un tiempo t cualquiera.

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v} dT$$

El teorema fundamental del cálculo, en su segunda parte nos dice, palabras más palabras menos que: “la integral es la operación inversa de la derivada”, es decir:

$$\int d = 1$$

Así,

$$\vec{r}\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \vec{v} dT$$

Usando el teorema fundamental del cálculo del lado derecho de la ecuación,

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\, dT$$

Sumando $\vec{r}(t_0)$ a ambos lados de la igualdad,

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\, dT + \vec{r}(t_0) \ldots\ldots..(6)$$

La ecuación (6) es la expresión más general de la posición a expensas de conocer la velocidad. Esta ecuación nos está diciendo: La posición para todo tiempo de “la pelota de golf” es la integral de la velocidad desde un tiempo t_0 conocido hasta un tiempo t cualquiera, más la posición de la pelota en el tiempo t_0.

Como ubicamos el origen del sistema justo en el lugar donde partió la pelota podemos afirmar que:

$$\vec{r}(t = 0s) = \vec{0}(m)$$

En nuestro caso particular,

$$t_0 = 0\,, \vec{v} = \left[(10 + 5t)\hat{\imath} + \left(10\sqrt{3} - 5\sqrt{3}t\right)\hat{\jmath}\right]\left(\frac{m}{s}\right)\ y\ \vec{r}(t = 0s) = \vec{0}(m)$$

Sustituimos en la ecuación (6)

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \left[(10 + 5t)\hat{\imath} + \left(10\sqrt{3} - 5\sqrt{3}t\right)\hat{\jmath}\right]dt + 0\ (m)$$

Integramos,

$$\vec{r}(t) = \left(10t + \frac{5}{2}t^2\right)\hat{\imath} + \left(10\sqrt{3}t - \frac{5\sqrt{3}}{2}t^2\right)\hat{\jmath}\ (m) \ldots\ldots (7)$$

La ecuación (7) es la expresión que define la posición de la pelota para cualquier instante de tiempo.

Nos preguntan a qué distancia sobre el cambo cae la pelota.

Note que cuando la pelota cae sobre el campo la componente $\hat{\jmath}$ de la posición de la pelota es cero.

Así,

$$10\sqrt{3}t - \frac{5\sqrt{3}}{2}t^2 = 0 \ \Rightarrow t\left(10\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}t\right) = 0$$

$$t = 0s \ \ t = 4s$$

Esto es conocido en los bajos mundos como “tiempo de vuelo”, pues es el tiempo en el que estuvo “volando” la pelota en el aire. Sí, LAS PELOTAS VUELAN EN EL AIRE, para que usted vea las cosas que nos dice la física.

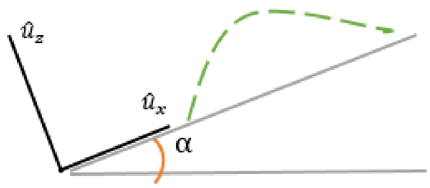
Finalmente, la distancia a la que cayó la pelota sobre el campo es el tiempo de vuelo evaluado en la componente $\hat{\imath}$ de la posición de la pelota

$$\vec{r}(t = 4s) = \left(10(4) + \tfrac{5}{2}(4)^2\right)\hat{\imath}\ (m)$$

$$\vec{r}(t = 4s) = 80(\hat{\imath})(m)$$

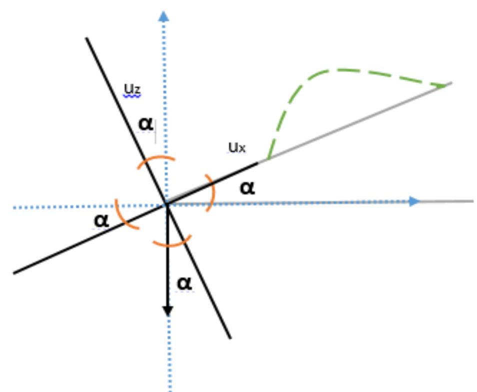
Problema # 5

La figura muestra la trayectoria de una pelota de golf sobre un campo inclinado un Angulo α respecto a la horizontal. El eje z es perpendicular al campo. La aceleración de la pelota mientras esta en aire es:



Solución: la aceleración de la pelota mientras esta en el aire es g en la dirección que va hacia el centro de la tierra.

Luego, hubo una rotación α hacia la izquierda del SR

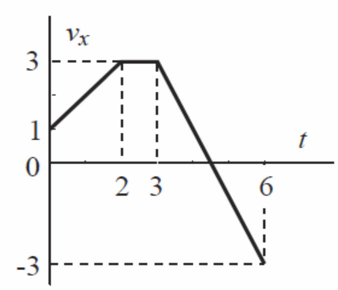


$$a(t) = -g\,[Sen(\alpha)\hat{u}_z + Cos\,(\alpha)\hat{u}_x]$$

Problema # 6

En la figura se muestra la componente x de la velocidad, $Vx(t)$ para una particula que se mueve sobre el eje x. Suponga que en $t = 0$ la partícula se encuentra en x = 2. Todas las unidades pertenecen al sistema internacional de unidades (SI)

a) Halle la función $Vx(t)$ en el intervalo de tiempo $t \in [\,0,6]$.
b) Encuentre la componente x de la aceleración, $Ax(t)$ y la coordenada $x(t)$ en el intervalo $t \in [0,6]$.
c) Grafique las funciones *Ax(t)* y *x(t)*



Solución.

Parte A

Observamos que la gráfica mostrada a nuestra derecha representa una función a trozos formada por tres rectas limitadas en los intervalos

$$0 \leq t \leq 2, \quad 2 < t \leq 3 \quad y \quad 3 < t \leq 6$$

Así, para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2$ hallamos la función $Vx(t)$

Debemos hallar la recta que pase por los puntos $p1(0,1)\ y\ \ p2\ (2,3)$

Mediante la ecuación punto pendiente tenemos que:

$$y - y_1 = m(x - x_1), con\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3-1}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$$

Con $m = 1$ y el punto $p1(0,1)$ se arma la ecuación que describe la velocidad para todo tiempo comprendido en $0 \leq t \leq 2$. Esto es:

$$y - 1 = (x - 0)$$

$$y = x + 1$$

Luego, para el intervalo de tiempo $2 < t \leq 3$ la función $Vx(t)$ es constante y equivale

$$y = 3$$

Por último, para el intervalo de tiempo $3 < t \leq 6$ Debemos hallar la recta que pasa por los puntos $p1(3,3)\ \ y\ \ p2\ (6,-3)$

$$y - y_1 = m(x - x_1), con\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-3-3}{6-3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Con $m = -2$ y el punto $p1(3,3)$ se arma la ecuación que describe la velocidad para todo tiempo comprendido en $3 < t \leq 6$. Esto es

$$y—3 = -2(x-3) \Rightarrow y - 3 = -2x + 6 \Rightarrow y = \ -2x + 6 + 3$$

$$y = -2x + 9$$

Finalmente la función $Vx(t) = \begin{cases} t+1 & si\ \ 0 \leq t \leq 2 \\ 3 & si\ 2 < t \leq 3 \\ -2t+9 & si\ \ 3 < t \leq 6 \end{cases}$

Parte B

Es conocido que $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow a(t) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 \le t \le 2 \\ 0 & si\ 2 < t \le 3 \\ -2 & si\ \ 3 < t \le 6 \end{cases}$

Por otro lado,

$$x(t) = \int_{t_1}^{t} v(t)dT + x(t_1)$$

$$x(0 \le t \le 2) = \int_{0}^{t} (t+1)dT + 2 \Rightarrow x(0 \le t \le 2) = \frac{t^2}{2} + t + 2$$

Luego para $x(2 < t \le 3) = 3t$ esto debido a que la partícula lleva velocidad constante, por tanto su posición solo depende del tiempo.

Calculamos $x(t = 3s) = 3 * (3) = 9$

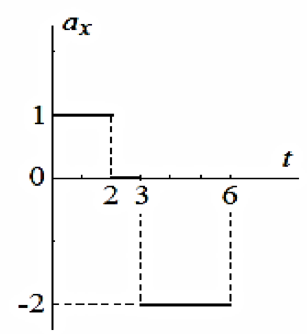
$$x(3 < t \le 6) = \int_{t=3s}^{t} (-2t+9)dT + 9 = [-T^2 + 9T]\Big|_3^t + 9$$

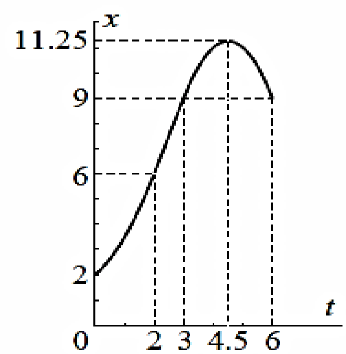
$$x(3 < t \le 6) = -t^2 + 9t - [-(3)^2 + 9(3)] + 9$$

$$x(3 < t \le 6) = -t^2 + 9t - 18 + 9 = -t^2 + 9t - 9$$

Finalmente: $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + t + 2 & si\ \ 0 \le t \le 2 \\ 3t & si\ \ 2 < t \le 3 \\ -t^2 + 9t - 9 & si\ \ 3 < t \le 6 \end{cases}$

Parte c





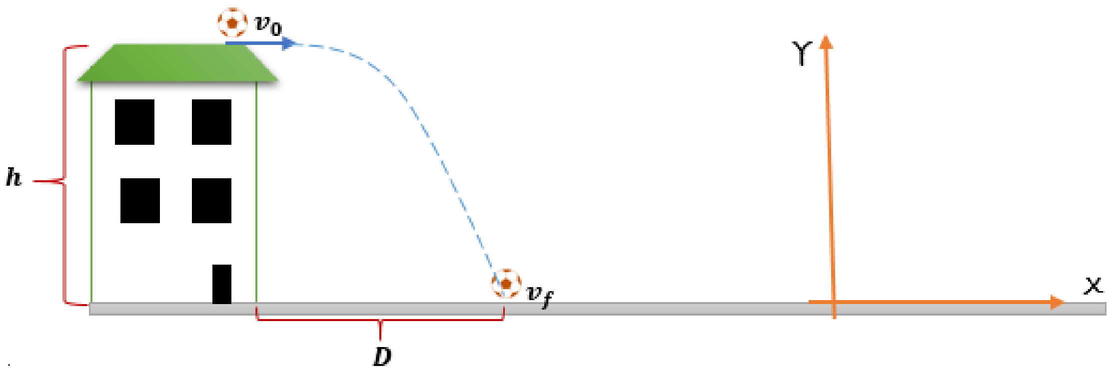
Problema # 7

Una pelota se lanza horizontalmente desde la azotea de un edificio de 35 m de altura. La pelota golpea el suelo en un punto de 80 m del borde del edificio.

a) Determine el tiempo que dura la pelota en el aire.
b) La velocidad inicial con la que fue lanzada la pelota.
c) La velocidad final con la que la pelota toca el suelo.

Solución.

En primer lugar realizamos un borrador de la situación física presentada y escogemos un sistema de referencia.



Escribimos los datos que nos dan sobre las condiciones iniciales del problema. Es decir, las situaciones que nos ayudarán a describir el movimiento de la pelota.

Datos:

- Distancia desde el borde del edificio hasta la pelota D = 80 m.
- Altura del edificio h = 30 m.
- Posición inicial de la pelota $r(t = 0s) = H\hat{j}\ (m)$.
- Posición final de la pelota $r(t = Xs) = D\hat{\imath}\ (m)$.
- Velocidad inicial de la pelota $V(t = 0s) = V_0\hat{\imath}\ (\frac{m}{s})$.
- Aceleración para todo tiempo de la pelota $a(t) = -g\hat{j}\ (\frac{m}{s^2})$.

Tomamos un Sistema de Referencia (SI). En nuestro caso será el de coordenadas xy con los vectores unitarios $\hat{\imath}, \hat{j}$ hacia la derecha y hacia arriba respectivamente. Con origen en el borde del edificio desde donde se mide la distancia D donde cayó la pelota.

Seguidamente, escribimos las ecuaciones de movimiento: Una vez la pelota está en el aire está bajo los efectos de la gravedad por tanto,

$$\vec{a}(t) = g(-\hat{j})\ (\frac{m}{s^2})$$

Por definición, la derivada de la velocidad es la aceleración y se cumple que

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dT + v_0 \Rightarrow \vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} -g\hat{j}\,dt + v_0\hat{\imath} \Rightarrow \vec{v}(t) = -gt\,\hat{j} + v_0\hat{\imath}\left(\frac{m}{s}\right)$$

Reacomodando,

$$\vec{v}(t) = v_0\hat{\imath} - gt\hat{j}\,(\frac{m}{s})$$

Así, con la velocidad para todo tiempo conocida es posible hallar la posición para todo tiempo.

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt + r_0 \Rightarrow \vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} (v_0\hat{\imath} - gt\hat{j})dt + h\hat{j} \Rightarrow \vec{r}(t) = v_0t(\hat{\imath}) + \left(-\frac{gt^2}{2} + H\right)\hat{j}$$

Reacomodando,

$$\vec{r}(t) = v_0t\hat{\imath} + \left(H - \frac{gt^2}{2}\right)\hat{j}\,(m)$$

Finalmente, respondemos las preguntas formuladas en el problema.

1) Tiempo de vuelo: el tiempo de vuelo de la pelota viene dada por el tiempo que tarda en llegar la pelota al suelo. Es decir, cuando la componente vertical del movimiento de la pelota es igual a 0.

Así,

$$h - \frac{g\,t^2}{2} = 0 \Rightarrow t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(35)m}{10\,\left(\frac{m}{s^2}\right)}} \Rightarrow t_v = \sqrt{7s^2}$$

$$t_v = \sqrt{7}\,s$$

2) Velocidad inicial de la pelota: es la velocidad con la cual fue lanzada la pelota desde la azotea del edificio para que recorriera una distancia horizontal de 80 m. Es decir,

$\vec{r}(t) = v_0t \Rightarrow D = v_0t \Rightarrow despejando\ v_0 = \frac{D}{t}$, Este tiempo, es el tiempo que le tomo a la pelota recorrer dicha distancia. Es decir, el tiempo de vuelo calculado en la pregunta 1.

Entonces

$$v_0 = \frac{D}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \Rightarrow v_0 = \frac{35\,m}{\sqrt{\frac{2(35)m}{10\,\frac{m}{s^2}}}} \Rightarrow v_0 = \frac{35}{\sqrt{7}}\left(\frac{m}{s}\right) \Rightarrow v_0 = \frac{35\sqrt{7}}{7}\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$v_0 = 5\sqrt{7}\,(\frac{m}{s})$$

3) Velocidad final de la pelota: es la velocidad con la cual la pelota toca el piso. Puesto que tenemos la ecuación de la velocidad para todo tiempo solos nos queda evaluarla en el tiempo de vuelo.

$$\vec{v}(t) = v_0\hat{\imath} - gt\hat{\jmath}\ \left(\frac{m}{s}\right) \Rightarrow \vec{v}_f\left(t = \sqrt{\frac{2H}{g}}\right) = v_0\hat{\imath} - g\left(\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)\hat{\jmath}\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\vec{v}_f = 5\sqrt{7}\hat{\imath} - 10\sqrt{7}\hat{\jmath}\ (\frac{m}{s}).$$

Reacomodando,

$$v_f = 5\sqrt{7}(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})(\frac{m}{s})$$

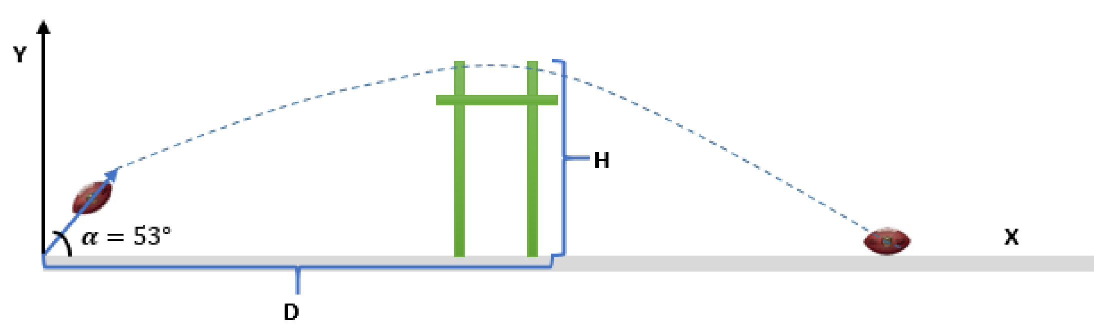
Problema # 8

Un pateador de lugar debe patear un balón de futbol desde un punto de 36 m de la zona de gol librando un par de postes ubicado a 3.5 m de altura. Cuando se patea el balón abandona el suelo con una velocidad de 20 $\frac{m}{s}$ y un ángulo de 53 grados respecto a la horizontal del suelo.

a) Determine por cuanta distancia el balón libra o no la altura de los postes.
b) ¿El balón se aproxima a los postes mientras continúa ascendiendo o cuando desciende?
c) ¿Qué distancia y a qué altura esta la pelota cuando esta alcanza su altura máxima?
d) Determine a que distancia caerá la pelota sobre el campo.

Solución:

Realizamos un bosquejo de la situación física presentada.



Datos.

D = 36 (m)   ; H = 3.5 (m)   ; $\vec{v}_0 = 20\frac{m}{s}$, $\sphericalangle$ 53 ° ; $\vec{r}_0 = 0\ m$; $\vec{a}(t) = -gj\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$

$\vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\,\hat{\imath} + v_0 sen(\alpha)\hat{\jmath}\ \left(\frac{m}{s}\right)$

Ecuaciones de Cinemática.

$$\vec{a}(t) = g(-\hat{\jmath})\ \left(\frac{m}{s^2}\right) \ldots..(1)$$

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\, dT + \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v}(t) = \int_{t=0}^{t} -g\hat{\jmath}dt + v_0 \cos(\alpha)\,\hat{\imath} + v_0 sen(\alpha)\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = -gt\,\hat{\jmath} + v_0 \cos(\alpha)\,\hat{\imath} + v_0 sen(\alpha)\hat{\jmath}\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos(\alpha)\,\hat{\imath} + (v_0 sen(\alpha) - gt)\hat{\jmath}\ \left(\frac{m}{s}\right) \ldots\ldots.(2)$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt + \vec{r}_0 \Rightarrow \vec{r}(t) = \int_{t=0s}^{t} v_0 \cos(\alpha)\hat{\imath} + (v_0 sen(\alpha) - gt)\hat{\jmath}\ dt + \vec{0}$$

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t.\hat{\imath} + \left(v_0 sen(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}\right)\hat{\jmath}\ (m) \ldots\ldots.(3)$$

Respondemos a las preguntas planteadas por el problema.

1. ¿Libra o no el balón los postes? , para ello determinamos el tiempo que le tomará a la pelota recorrer una distancia de 36 m.

Así,

$$D = v_0 \cos(\alpha)t \Rightarrow despejando\ t = \frac{D}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow t = \frac{36\ m}{20 \cos(53°)\frac{m}{s}}$$

$$t \approx 3\ s$$

Luego nos preguntamos ¿a los t = 3s a que altura se encuentra la pelota? Respondemos esta pregunta evaluando dicho tiempo en la ecuación del eje vertical de movimiento.

Así,

$$y = v_0 sen(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow y = 20\ sen(53°)(3) - \frac{10(3)^2}{2}$$

$$y \approx 2.92\ (m)$$

Como los postes tienen una altura de 3.5 (m) el balón no libra los postes por

$$(3.5 - 2.92)m = 0.59\ m$$

2. ¿Se aproxima mientras desciende o asciende la pelota?

Antes de responder esta pregunta conviene saber a qué distancia y altura se encuentra en su punto más alto, de esta manera será simple verificar si la pelota está en ascenso o en descenso.

Para ello, hallamos el tiempo máximo de altura, este viene dado cuando la primera derivada del movimiento vertical que describe la pelota es cero. Es decir, cuando la componente vertical de la velocidad es cero.

Así,

$$0 = v_0 sen(\alpha) - gt, despejamos\ \ t_{max} = \frac{v_{0\ sen(\alpha)}}{g}$$

$$t_{\max} = \frac{20. Sen(53°)\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{m}{s^2}}$$

$$t_{max} \approx 2\ s$$

Luego, evaluamos t_{max} en $\vec{r}(t) = \ v_0 \cos(\alpha)\, t. \hat{\imath} + \left(v_0 sen(\alpha) t - \frac{gt^2}{2}\right) \hat{\jmath}\ (m)$

Así,

$$\vec{r}(t_{max}) = v_0 \cos(\alpha) \left(\frac{v_0 sen(\alpha)}{g}\right) \hat{\imath} + \left[v_0 sen(\alpha) \left(\frac{v_0 sen(\alpha)}{g}\right) - \frac{g\left(\frac{v_0 sen(\alpha)}{g}\right)^2}{2} \hat{\jmath} \right]$$

Simplificamos,

$$\vec{r}(t_{max}) = \frac{{v_0}^2 sen(\alpha)\cos(\alpha)}{g} \hat{\imath} + \left[\frac{{v_0}^2 sen^2(\alpha)}{g} - \frac{\frac{g{v_0}^2 sen^2(\alpha)}{g^2}}{2} \hat{\jmath} \right]$$

Simplificamos,

$$\vec{r}(t_{max}) = \frac{{v_0}^2 sen(\alpha)\cos(\alpha)}{g} \hat{\imath} + \left[\frac{{v_0}^2 sen^2(\alpha)}{g} - \frac{{v_0}^2 sen^2(\alpha)}{2g} \hat{\jmath} \right]$$

Simplificamos,

$$\vec{r}(t_{max}) = \frac{{v_0}^2 sen(\alpha)\cos(\alpha)}{g}\hat{\imath} + \left[\frac{2{v_0}^2 sen^2(\alpha) - {v_0}^2 sen^2(\alpha)}{2g}\hat{\jmath}\right]$$

Simplificamos,

$$\vec{r}(t_{max}) = \frac{{v_0}^2 sen(\alpha)\cos(\alpha)}{g}\hat{\imath} + \left[\frac{{v_0}^2 sen^2(\alpha)}{2g}\hat{\jmath}\right](m)$$

Entonces,

$$x = \frac{(20)^2 sen(53°)\cos(53°)}{10} \approx 19.2\ m$$

Y

$$y = \frac{(20)^2 sen^2(53°)}{2.(10)} \approx 12.8\ m$$

$\therefore$ *la pelota se encuentra descendiendo al llegar a los postes debido que su altura máxima se alcanza a los* 19.2 *m y los postes estan a* 32 (m)

Por último, para conocer donde caerá la pelota sobre el campo de juego es preciso hallar el tiempo de vuelo $t_v = v_0 sen(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} = 0$ despejando t tenemos que:

$$t_v\left(v_0 sen(\alpha) - \frac{g t_v}{2}\right) = 0 \Rightarrow t_v = 0 \quad \text{ó} \quad t_v = \frac{2v_0 sen(\alpha)}{g}$$

Sustituyendo t_v *en* $\vec{r}(t_v)$ eje de las x tenemos que:

$$\vec{r}(t_v) = v_0\cos(\alpha)\left(\frac{2v_0 sen(\alpha)}{g}\right).(m)$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t_v) = \frac{{v_0}^2\ \mathrm{sen}(2\alpha)}{g}.(m)$$

$$\Rightarrow r(t_v) = \frac{(20)^2 sen(2(53°)}{10} \approx 38.5\ (m)$$

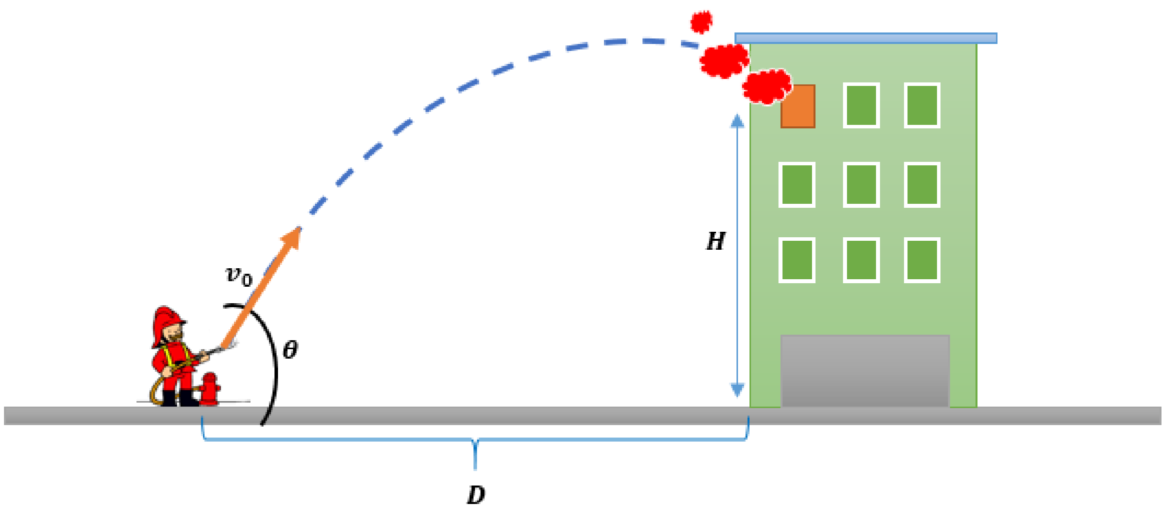
Problema # 9

Un bombero a una distancia de un edificio en llamas dirige un chorro de agua de una manguera a un ángulo θ sobre la horizontal. Si la velocidad inicial de la corriente de agua es v_0.

a) Determine una expresión que permita calcular a que altura el agua incide sobre el edificio.

Solución.

Realizamos un bosquejo de la situación física presentada.



Datos:

Distancia: D; Velocidad Inicial: v_0 ; Angulo de inclinación: θ ; Aceleración: $\vec{a}(t) = -g\hat{j}$

Posición inicial: $\vec{r}_0 = \vec{0}$; Velocidad Inicial: $v_0 = v_0 cos\theta\hat{\imath} + v_0 sen\theta\hat{j}$

Tomamos un Sistema de Referencia (SI) con origen en la ubicación del bombero. En nuestro caso será el de coordenadas xy con los vectores unitarios ij donde i es hacia la derecha y j hacia arriba.

Ecuaciones de Cinemática

$$\vec{a}(t) = g(-\hat{j}) \left(\frac{m}{s^2}\right) \ldots .(1)$$

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\, dT + v_0 \Rightarrow v(t) = \int_{0}^{t} -g\hat{j}\, dT + v_0 cos\theta\hat{\imath} + v_0 sen\theta\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = -gt\hat{j} + v_0 cos\theta\hat{\imath} + v_0 sen\theta\hat{j}\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Reacomodando,

$$\vec{v}(t) = v_0\cos\theta\hat{\imath} + (v_0\text{sen}\theta - gt)\hat{j}\left(\frac{m}{s}\right) \ldots\ldots (2)$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt + r_0 = r(t) = \int_{0}^{t} [v_0 cos\theta\hat{\imath} + (v_0 sen\theta - gt)\hat{j}]\, dt + \vec{0}$$

$$\vec{r}(t) = (v_0\cos\theta t)\hat{\imath} + \left(v_0\text{sen}\theta t - \frac{gt^2}{2}\right)\hat{j}(m) \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Ahora bien, ¿Cómo determinamos dicha expresión? Es importante, en estos casos no confundirse y analizar cuidadosamente los datos dados por el problema. Se puede caer en el error de pensar que no poseemos datos suficientes.

Sim embargo, es preciso recordar que en las ecuaciones de cinemática con aceleración constante el movimiento de los cuerpos siempre se da en dos planos: a saber, el horizontal representado por la componente x y la vertical representado por la componente y. Para este problema en particular la componente x representa la distancia que debe recorrer el agua desde el punto de origen hasta la base del edificio. Ello se puede representar de la siguiente manera.

$$D = v_0\cos\theta t \ldots\ldots (4)$$

De manera similar podemos decir que la altura está representada por la componente y, y la podemos representar

$$H = v_0\text{sen}\theta t - \frac{gt^2}{2} \ldots\ldots (5)$$

Luego, el tiempo que tarda el agua en recorrer la distancia horizontal hacia el edificio puede despejarse de la ecuación 4.

Así,

$$t = \frac{D}{v_0\cos\theta} \ldots\ldots (6)$$

Finalmente sustituyendo (6) en (5) tenemos que:

$$H = v_0\text{sen}\theta\left(\frac{D}{v_0\cos\theta}\right) - \frac{g\left(\frac{D}{v_0\cos\theta}\right)^2}{2}\ (m)$$

Desarrollando y simplificando.

$$H = D.\,Tg\theta - \frac{gD^2}{2v_0^2\cos^2\theta}\ (m)$$

Factor común D y m.c.d $2v_0^2cos^2\theta$

$$H = D\left(\frac{Tg\theta 2v_0^2\cos^2\theta - gD}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)(m)\ ,$$

Finalmente,

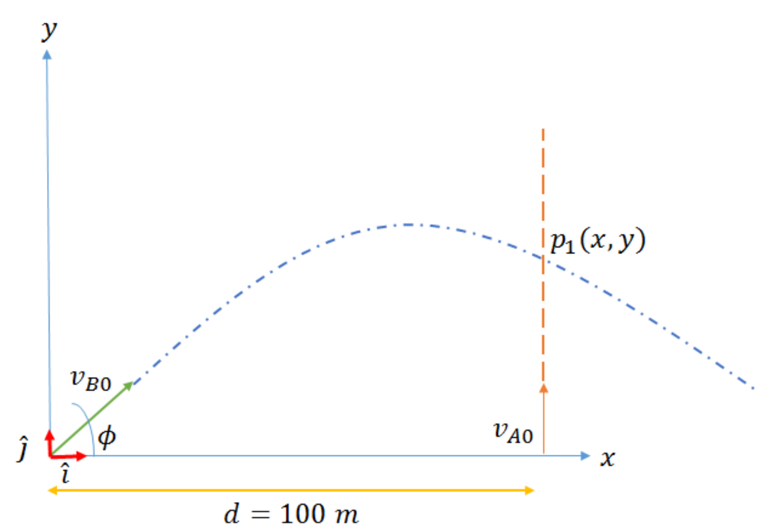
$$H = D\left(\frac{{v_0}^2\ sen(2\theta) - gD}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)(m)$$

Problema # 10

Se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con $v_{A0} = 30\left(\frac{m}{s}\right)$. En el mismo instante y a una distancia $D = 100\ m$ se dispara contra A un proyectil B con $v_{B0} = 500\ \left(\frac{m}{s}\right)$

a) Cuál debe ser el ángulo ϕ de disparo para que el proyectil impacte sobre A.
b) A que altura y en que instante se produce el impacto.

Situación Física.



Escribimos las ecuaciones de cinemática para ambas partículas.

<u>Para la partícula B</u>

$\vec{a}(t) = -g\hat{j}$

$\vec{v}(t) = v_{B0}(cos\phi\hat{\imath} + \sin\phi\hat{j}) - gt\hat{j} = v_{B0}\cos\phi\hat{\imath} + (v_{B0}\sin\phi - gt)\hat{j}$

$\vec{r}(t) = r_{B0} + v_{B0}(cos\phi\hat{\imath} + \sin\phi\hat{j})t - \frac{1}{2}gt^2\hat{j} = r_{B0} + v_{B0}\cos\phi\, t\hat{\imath} + (v_{B0}\sin\phi\, t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{j}$

<u>Partícula A</u>

$\vec{a}(t) = -g\hat{j}$

$\vec{v}(t) = (v_{A0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - gt)\hat{j}$

$\vec{r}(t) = d\hat{\imath} + (v_{A0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{j}$

Respondemos las preguntas.

Para que la partícula A y la Partícula B impacten ambas posiciones deben ser iguales.

Para las componentes en $\hat{j}$

$$v_{B0}\sin\phi\, t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{A0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_{B0}\sin\phi = v_{A0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\phi = \frac{v_{A0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{v_{B0}} = \frac{30\ \left(\frac{m}{s}\right)1}{500\left(\frac{m}{s}\right)} = \frac{3}{50} = 0.06$$

Así para las componentes en $\hat{\imath}$

$$r_{B0} + v_{B0}\cos\phi\, t = \ d$$

$$v_{B0}\cos\phi\, t = \ d$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{d}{v_{B0}\cos\phi} = \frac{100\ (m\ )}{500\left(\frac{m}{s}\right)\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{3}{50}\right)\right)} = 0.2\ s$$

Sustituimos $t = 0.2\ s$ en la ecuación $v_{A0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{\jmath}$ pasa saber la altura a la que se encuentra.

$$h = v_{A0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)t - \frac{1}{2}gt^2)$$

$$\boldsymbol{h} = 30\left(\frac{m}{s}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)(0.2s) - \frac{1}{2}10\ \left(\frac{m}{s^2}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^2 s^2 = \frac{29}{5}m = 5.8\ m$$

Problema # 11. Calcular la velocidad angular de un disco que gira con movimiento uniforme de 13.2 rad cada 6 s. Calcular también el periodo y la frecuencia de rotación. Calcular que tiempo le tomará al disco girar un ángulo de 780°. Calcular en que tiempo da 12 revoluciones.

Recordemos algunos conceptos.

Periodo: denotado con la letra "T" es el tiempo en el que una partícula da una vuelta.

$$T = \frac{tiempo}{\#\ vueltas}$$

Frecuencia: es el inverso del periodo. Se denota con el símbolo "f"

$$f = \frac{1}{T}$$

Velocidad angular: Denotado con el símbolo ω es la cantidad de ángulo recorrido por unidad de tiempo.

$$\omega = 2\pi f$$

Solución

Llevamos de rad a vueltas

$$13.2\ rad\frac{1\ vuelta}{2\pi\ rad} = 2.1\ vueltas$$

Así $T = \frac{6s}{2.1\ vueltas} = \frac{20}{7}s$ cada 20/7 segundos da una vuelta.

Además, $f = \frac{7}{20}s^{-1}$

$$\omega = 2\pi * \frac{7}{20} = \frac{7\pi}{10}\ s^{-1} = 2.20\ s^{-1}$$

Sabemos que,

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega\ \rightarrow\ d\theta = \omega dt \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t}\omega dt$$

Como la velocidad angular es contante.

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

Asumiendo que el ángulo de inicio es 0 en el tiempo 0

$$\theta = \omega t \ldots \ldots.(1)$$

Llevamos los 780° a rad

$$780° * \frac{1\,rad}{57{,}2958\,°} = 13{,}61\,rad$$

Sustituyendo en (1)

$$\frac{13{,}61}{\omega} = t \rightarrow t = \frac{13{,}61}{2{,}20} = 6{,}18\,s$$

Para la última pregunta llevamos las revoluciones a radianes.

$$12\,rev * \frac{2\pi}{1\,rev} = 75{,}40\,rad$$

Sustituyendo en (1)

$$\frac{75{,}40}{\omega} = t \rightarrow t = \frac{75{,}70}{2{,}20} = 34.4\,s$$

Problema # 12 La velocidad angular de un volante aumenta uniformemente de 20 rad/s a 30rad/s en 5s. Calcular la aceleración angular y el ángulo total recorrido.

Sabemos que la aceleración angular es la tasa de cambio de velocidad medido en el tiempo.

Así

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{(5-0)s} = \frac{30\frac{rad}{S} - 20\frac{rad}{s}}{5s} = \frac{10rad}{5s^2} = 2\left(\frac{rad}{s^2}\right)$$

$$\omega = 2\left(\frac{rad}{s^2}\right)t$$

$$\theta = 1(\frac{rad}{s^2})t^2 \rightarrow \theta = \left(\frac{rad}{s^2}\right)\,(5s)^2 = 125\,rad$$

Problema # 13

77. Una partícula describe un círculo de radio 16 m en el plano xz. En cierto instante su velocidad es paralela al eje x y su aceleración es $(4\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{k})$ m/s^2. Su rapidez en ese instante, en m/s, es

A) 8

B) 12

C) 3/4

D) $4\sqrt{97}$

E) distinta de las indicadas en las opciones anteriores.

Solución.

Recuerde que en el movimiento circular la aceleración tiene dos componentes. La componente radial y la componente tangencial.

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

Es conocido que,

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Multiplicamos ambos lados por R,

$$Ra_c = v^2$$

Tomamos operador raíz ambos lados de la igualdad,

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{Ra_c}$$

Así,

$$|v| = \sqrt{Ra_c}$$

Sustituimos las cantidades conocidas,

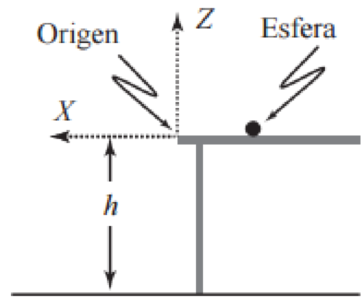
$$|v| = \sqrt{16\ (m) * 4\left(\frac{m}{s^2}\right)}$$

Simplificando,

$$|v| = 8\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

Problema #14

13. Una pequeña esfera rueda con una velocidad constante de módulo v y dirección hacia la izquierda sobre la mesa de la figura. Tome $t = 0$ en el instante para el cual la esfera abandona la mesa. ¿Cuál de las siguientes expresiones describe el movimiento de la esfera desde $t = 0$ hasta llegar al piso?



A) $\boldsymbol{r}(t) = vt\,\boldsymbol{i} + (-gt^2/2 + h)\,\boldsymbol{k}$.

B) $\boldsymbol{r}(t) = vt\,\boldsymbol{i} + (-gt^2/2)\,\boldsymbol{k}$.

C) $\boldsymbol{r}(t) = (-gt^2/2 + h)\,\boldsymbol{k}$.

D) $\boldsymbol{r}(t) = (-gt^2/2 + vt + h)\,\boldsymbol{k}$.

E) $\boldsymbol{r}(t) = -vt\,\boldsymbol{i} + (gt^2/2)\,\boldsymbol{k}$.

Solución.

Cuando la esfera abandona la mesa esta solo bajo la acción de la gravedad. Se cumple que:

$$\vec{a}(t) = g(-\hat{k}) \ldots\ldots (1)$$

Con $\hat{k}$ un vector unitario en la dirección del eje Z.

Recordemos que,

$$\frac{d}{dT}\vec{v}(t) = \vec{a}(t) \ldots\ldots (2)$$

Sustituimos (1) en (2)

$$\frac{d}{dT}\vec{v}(t) = g(-\hat{k})$$

Multiplicamos por dT toda la ecuación,

$$d\vec{v}(t) = g(-\hat{k})dT$$

Integramos ambos lados de la igualdad desde un tiempo $t_0 = 0$ s (cuando la pelota deja la mesa) hasta un tiempo t cualquiera.

$$\int_0^t d\vec{v}(t) = \int_0^t g(-\hat{k})dT$$

Integramos ambos lados de la igualdad,

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = gt(-\hat{k})$$

Sumamos a ambos lados de la igualdad $\vec{v}(0)$,

$$\vec{v}(t) = gt(-\hat{k}) + \vec{v}(0)$$

Pero la velocidad que llevaba la pelota al salir de la mesa es $\vec{v}(0) = v(\hat{\imath})$

Sustituyendo,

$$\vec{v}(t) = v(\hat{\imath}) + gt(-\hat{k}) \ldots \ldots (3)$$

Análogamente,

$$\frac{d}{dT}\vec{r}(t) = \vec{v}(t) \ldots \ldots . (4)$$

Sustituimos (3) en (4)

$$\frac{d}{dT}\vec{r}(t) = v(\hat{\imath}) + gt(-\hat{k})$$

Multiplicamos toda la ecuación por dT,

$$d\vec{r}(t) = \left(v(\hat{\imath}) + gt(-\hat{k})\right) dT$$

Integramos ambos lados de la igualdad desde un tiempo $t_0 = 0$ s (cuando la pelota deja la mesa) hasta un tiempo t cualquiera,

$$\int_0^t d\vec{r}(t) = \int_0^t \left(v(\hat{\imath}) + gt(-\hat{k})\right) dT$$

Integramos ambos lados de la igualdad,

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = vt(\hat{\imath}) - g\frac{t^2}{2}(\hat{k})$$

Sumamos ambos lados de la igualdad $\vec{r}(0)$,

$$\vec{r}(t) = vt(\hat{\imath}) - g\frac{t^2}{2}(\hat{k}) + \vec{r}(0)$$

Pero la pelota en el tiempo $t = 0$ s estaba en el origen del sistema, es decir en el borde de la mesa.

Luego,

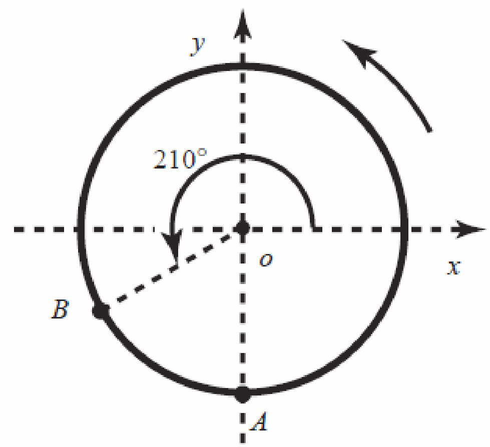
$$\vec{r}(t) = vt(\hat{\imath}) - g\frac{t^2}{2}(\hat{k})(\text{m})$$

Problema # 15

94. Una partícula se desplaza sobre un riel circular, con centro en el origen de coordenadas y situado en un plano horizontal, ver figura. El móvil parte del punto A, tiene rapidez constante, su movimiento es en sentido antihorario y al cabo de 6 segundos se halla por primera vez en el punto de coordenadas cartesianas $(-4, 0)$ m.

a. Halle el radio de la circunferencia, la velocidad angular w y el ángulo $\theta(t)$ que existe entre el vector posición de la partícula y el semieje x positivo para cualquier instante t.

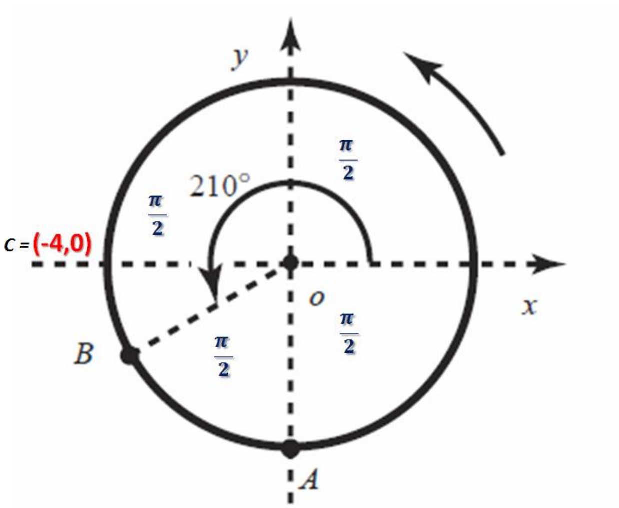
b. Exprese en la base cartesiana los vectores velocidad v y aceleración a de la partícula cuando se encuentra en el punto B. Calcule qué longitud de riel le falta recorrer para regresar al punto A.



Datos:

1) La partícula se mueve con rapidez contante.
2) Radio = 4 m
3) $\vec{r}_0 = 4(-\hat{j})m$ o $\vec{r}_0 = 4 \measuredangle \frac{3\pi}{2} rad$

Sabemos que $\omega = cte$. Nos dicen que al cabo de 6s la partícula viaja desde A hasta C



Es decir recorrió un ángulo $\theta = \frac{3\pi}{2} rad$

Y sabemos que $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\frac{3\pi}{2} rad}{(6-0)s} = \frac{3\pi}{12}\left(\frac{rad}{s}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{rad}{s}\right)$

Así, $\omega = \frac{\pi}{4}\left(\frac{rad}{s}\right)$

Además, por definición.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow d\theta = \omega dt \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$ Ecuación validad con $\omega = cte$

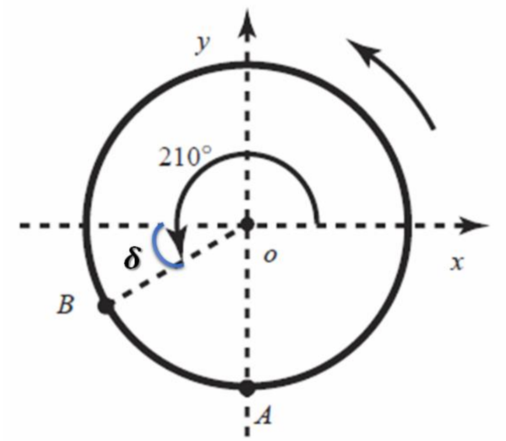
$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$. Sí además decimos que iniciamos el cronometro en el tiempo $t_0 = 0s$

Nos queda

$$\theta = \frac{3\pi}{2} rad + \frac{\pi}{4}\left(\frac{rad}{s}\right) t$$

Parte b) Nos pide hallar el vector velocidad y aceleración.

Para ello notamos que

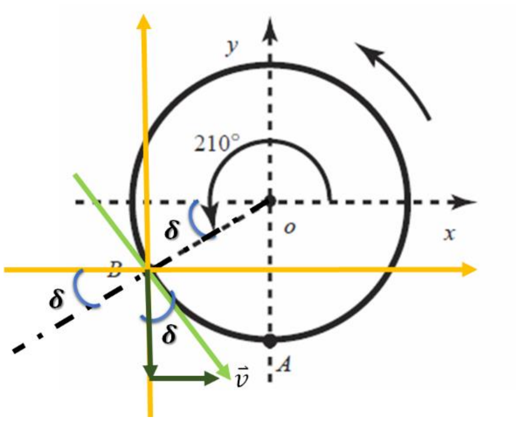


$$\delta = 210° - 180° = 30° * \frac{\pi}{180°} rad = \frac{\pi}{6} rad$$

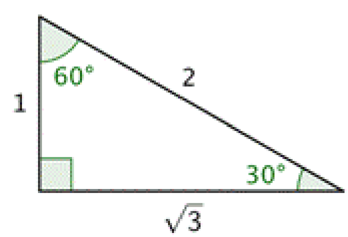
Por definición,

$$v = R\omega = 4(m)\frac{\pi}{4} rad = \pi(m)$$

Sabemos que el vector velocidad es tangente a la curva.



$$\overrightarrow{v_b} = v(\sin\delta\,\hat{\imath} - \cos\delta\,\hat{\jmath})\left(\frac{m}{s}\right)$$



$$\vec{v}_b = \pi\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right)\left(\frac{m}{s}\right)$$

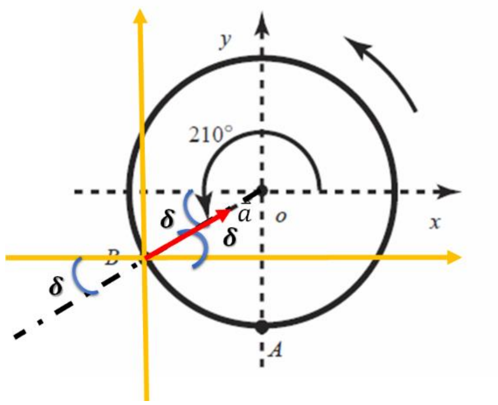
Reacomodamos,

$$\vec{v}_b = \frac{\pi}{2}(\hat{\imath} - \sqrt{3}\hat{\jmath})\left(\frac{m}{s}\right)$$

Análogamente,

$$a = R\omega^2 = 4(m)\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{rad}{s}\right)\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Luego el vector aceleración centrípeta por definición es radial y hacia el centro.



$$\vec{a} = a(\cos\delta\,\hat{\imath} + \sin\delta\,\hat{\jmath})\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right)\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{\pi^2}{8}\left(\sqrt{3}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right)\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Para saber cuál es la longitud de arco que se requiere para llegar desde B hasta A

Recordemos que $s = R\theta$

Donde s es la longitud de arco y θ el ángulo entre los puntos A y B

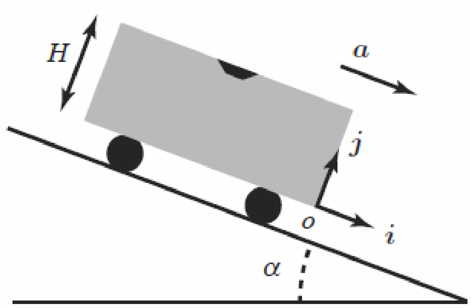
$$s = 4(m)60° * \frac{\pi}{180°} = \frac{4\pi}{3}(m)$$

Problema # 16

91. Un vagón de ferrocarril motorizado va cuesta abajo sobre un plano inclinado un ángulo α. La distancia entre el techo y el piso del vagón es H y su aceleración respecto a Tierra es constante y vale $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{i}$, ver figura. Un pasajero del vagón observa que una lámpara, situada en el centro del techo del vagón, se desprende y choca con el piso en el punto o (en el extremo inferior del vagón).

a. Halle la aceleración de la lámpara respecto a Tierra y respecto al pasajero del vagón. Exprese sus resultados en términos de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.

b. Escriba las componentes cartesianas de la velocidad y posición de la lámpara según el pasajero. Tome el origen en el punto o solidario al vagón y llame L a la longitud del vagón.



c. Halle el tiempo que tarda la lámpara en caer y la longitud L del vagón.

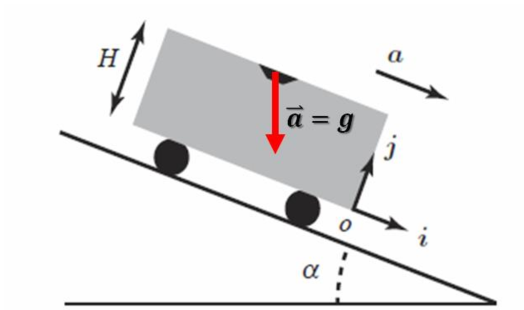
Solución Parte A)

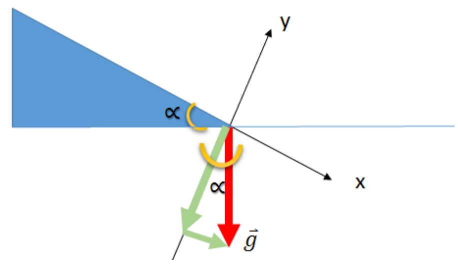
Sabemos que la aceleración del vagón respecto a tierra es $\overrightarrow{a_{v/T}} = a\hat{\imath}$

Además, visto desde tierra la aceleración de la lámpara en todo momento es $\overrightarrow{a_{L/T}} = \vec{g}$.

Sin embargo, dicha aceleración posee dos componentes por estar en un plano inclinado.

Así, dibujamos el vector aceleración (La fecha roja) y las descomponemos según el sistema.

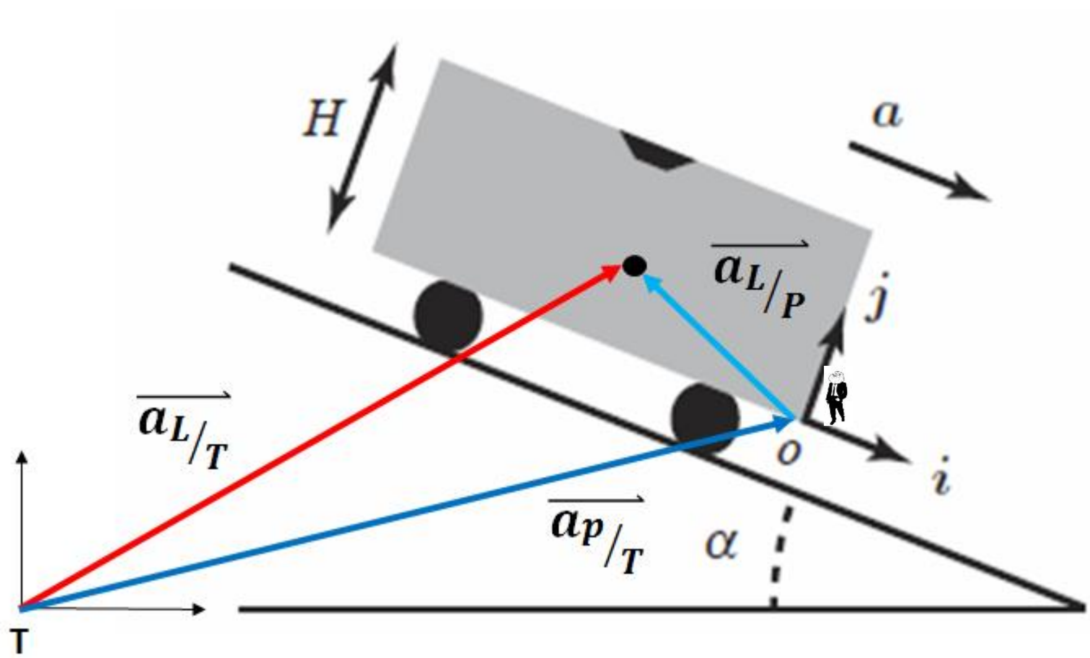




Claramente,

$$\overrightarrow{a_{L/T}} = g(\sin\alpha\,\hat{\imath} - \cos\alpha\,\hat{\jmath})\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Ahora considere que la lámpara se desprendió y está en un instante t



Se cumple que:

$$\overrightarrow{a_{P/T}} + \overrightarrow{a_{L/P}} = \overrightarrow{a_{L/T}}$$

$$\overrightarrow{a_{L/P}} = \overrightarrow{a_{L/T}} - \overrightarrow{a_{P/T}}$$

$$\overrightarrow{a_{L/P}} = g(\sin\alpha\,\hat{\imath} + \cos\alpha\,\hat{\jmath}) - a\hat{\imath}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\overrightarrow{a_{L/P}} = (g\sin\alpha - a)\hat{\imath} - g\cos\alpha\,\hat{\jmath}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Solución parte B)

Datos

1. La lámpara se suelta del techo por tanto su velocidad inicial es "0" vista por la persona dentro del vagón (ella no sabe que se está moviendo)
2. La posición de la lámpara en el tiempo $t = 0s$ vista por la persona del vagón es:

$$\overrightarrow{r_0} = -\frac{L}{2}\hat{\imath} + H\hat{\jmath}(m)$$

Así,

$$\overrightarrow{v(t)} = (g\sin\alpha - a)t\hat{\imath} - g\cos\alpha\,t\hat{\jmath}\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\overrightarrow{r(t)} = \left[(g\sin\alpha - a)\frac{t^2}{2} - \frac{L}{2}\right]\hat{\imath} + \left(H - g\cos\alpha\frac{t^2}{2}\right)\hat{\jmath}\ \ (m)$$

Solución parte C)

Tiempo en que tarda en caer la lámpara viene determinado por el instante en que la componente de la posición en $\hat{\jmath}$ es "0"

$$0 = H - g\cos\alpha\frac{t^2}{2}$$

$$\frac{2H}{\cos\alpha} = t^2$$

$$|t| = \sqrt{\frac{2H}{g\ \cos\alpha}}$$

Para hallar la longitud L del vagón sustituimos el tiempo de vuelo en la ecuación de la componente $\hat{\imath}$ y despejamos L

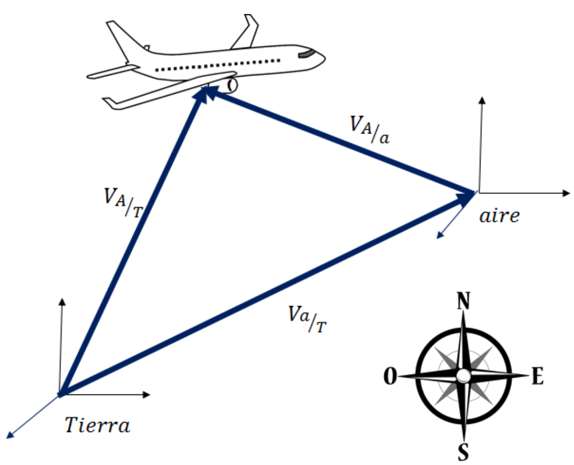
$$0 = (g\sin\alpha - a)\frac{\left(\sqrt{\frac{2H}{g\cos\alpha}}\right)^2}{2} - \frac{L}{2}$$

$$\frac{L}{2} = (g\sin\alpha - a)\frac{\left(\sqrt{\frac{2H}{g\cos\alpha}}\right)^2}{2}$$

$$L = \frac{2H(g\sin\alpha - a)}{g\cos\alpha}$$

Problema # 17

89. Los instrumentos de un aeroplano en vuelo horizontal indican que se dirige hacia el Este con una rapidez de 300 km/h respecto al aire. En Tierra se observa que el aeroplano se encuentra en medio de una corriente de aire que sopla hacia el Norte con rapidez de 60 km/h. Halle la velocidad y rapidez del avión respecto a Tierra.



$V_{A/T}$ = velocidad del Avion respecto tierra

$V_{A/a}$ = velocidad del Avion respecto el aire

$Va_{/T}$ = velocidad del aire respecto tierra

De aquí que

$$Va_{/T} + V_{A/a} = V_{A/T}$$

$$\vec{V}_{A/T} = 300\,\hat{E} + 60\hat{N}\left(\frac{Km}{h}\right)$$

$$\left|\vec{V}_{A/T}\right| = \sqrt{300^2 + 60^2} = \sqrt{93600} = 60\sqrt{26}\left(\frac{Km}{h}\right)$$

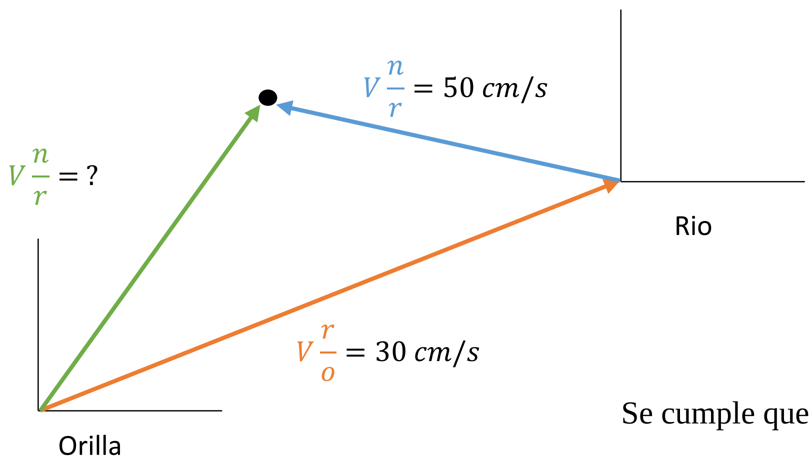
Problema # 18

Un joven nada durante un tiempo t_1=60s a favor de la corriente de un rio y luego regresa al punto de partida nadando a contracorriente durante un tiempo t2. Si la rapidez de la corriente respecto a la orilla es de 30 cm/s y el joven siempre nada con una rapidez de 50 cm/s respecto al agua. Se cumple que:

a) t2 = 96 s b) t2= 100 s c) t2= 60 s d) t2= 15 s e) t2= 240 s

Solución

$$V\frac{r}{o} = 30\, i\,\frac{cm}{s} \qquad I\, V\frac{n}{r} I = 50\,\frac{cm}{s}$$



Se cumple que $V\frac{r}{o} + V\frac{n}{r} = V\frac{n}{o}$

$V\frac{n}{o} = (30\, i + 50\, i)\frac{cm}{s}$ El nadador visto de las orilla tiene una velocidad de 80 cm/s en la dirección del rio.

Como la velocidad del nadador es constante

$$\Rightarrow V(t) = cte \ \Rightarrow r(t) = \int_0^t cte\ dt + r(t=0) \Rightarrow r(t) = V * t$$

Así la distancia D que recorrido el nadador fue de $D = 80\ i\ \frac{cm}{s} * 60s \Rightarrow D = 4800\ i\ cm$

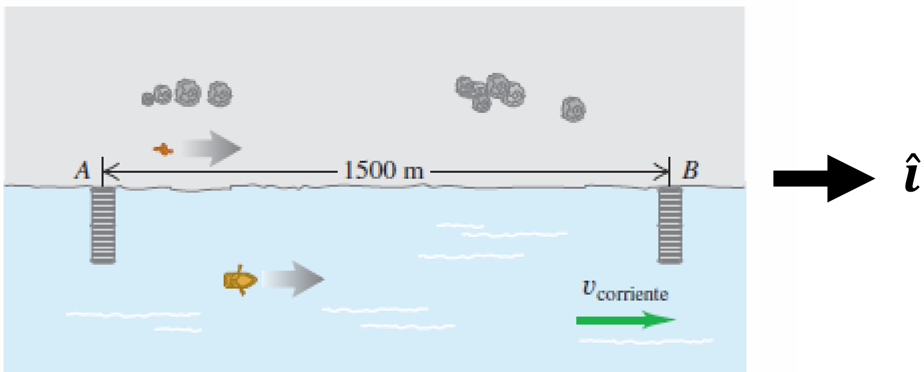
Ahora bien, nadando en contra del rio lo hace a una velocidad vista por un observador en tierra de $V\ \frac{n}{o} = (50i - 30i\ ) = \ 20\ i\,\frac{cm}{s}$

Entonces $t = \frac{D}{V} \ \Rightarrow t = \frac{4800}{20}\frac{\frac{Cm}{cm}}{s} \ \Rightarrow t = 240\ s$

Problema # 19

3.38. Dos muelles, *A* y *B*, están situados en un río; *B* está 1500 m río abajo de *A* (figura 3.44). Dos amigos deben ir de *A* a *B* y regresar. Uno rema un bote con rapidez constante de 4.00 km/h relativa al agua; el otro camina en tierra a 4.00 km/h constantes. La velocidad del río es 2.80 km/h en la dirección de *A* a *B*. ¿Cuánto tardará cada persona en hacer el viaje redondo?

Figura 3.44 Ejercicio 3.38.



Solución

Es claro que en ambos casos la distancia recorrida es $d = 3000\ m$ de donde 1500 m son ida y 1500 son vuelta.

Fijamos un sistema de referencia en la direccion $\hat{\imath}$ positiva de la corriente con origen en A.

Según un observador en tierra la velocida de quien camina es

$$\overrightarrow{V_{C/T}} = 4.00\left(\frac{Km}{h}\right)\hat{\imath}$$

Asi usando las ecuaciones cinematicas con velocidad constante tenemos que:

$$\overrightarrow{X(t)_{C/T}} = 4.00\left(\frac{Km}{h}\right)t$$

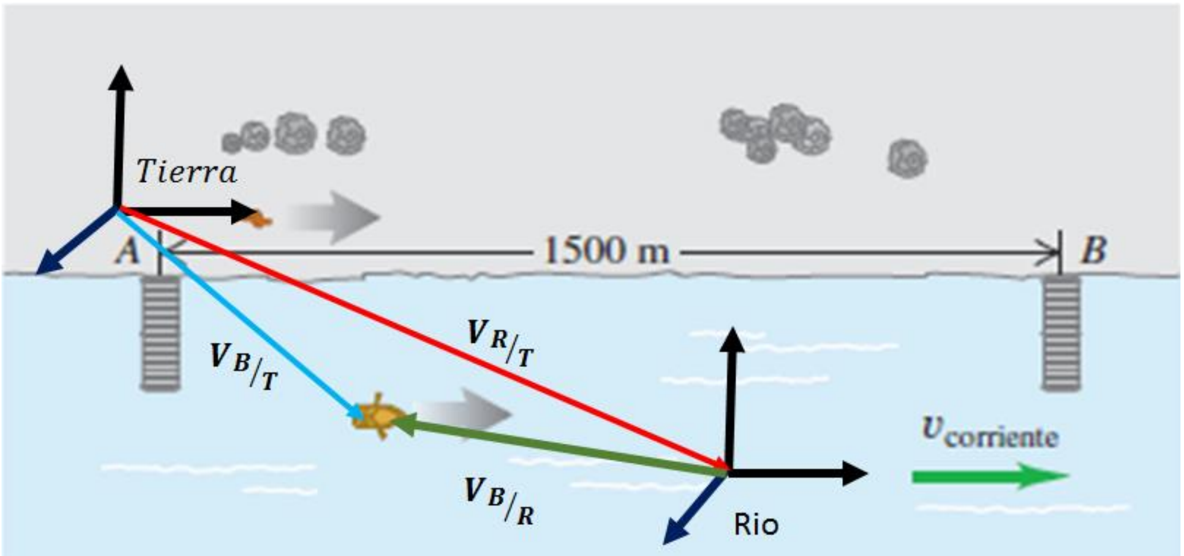
Como la distancia total recorrida fue de 3000 m. Entonces:

$$3.00\ Km = 4.00\left(\frac{Km}{h}\right)t$$

$$t = \frac{3.00\ km}{4.00\left(\frac{km}{h}\right)} = 0.750\ h * \frac{60\ min}{1h} = \mathbf{45\ min}$$

Ahora vemos la parte que amerita los conceptos de movimiento relativo.

Primero se divide los trayectos del hombre en el bote. A saber, cuando va a favor de la corriente y cuando va en contra de la corriente.



Mediante suma de vectores llegamos a la siguiente ecuacion vectorial

$$\overrightarrow{V_{R/T}} + \vec{V}_{B/R} = \overrightarrow{V_{B/T}}$$

Según el sitema fijado:

$$\vec{V}_{R/T} = 2.80\left(\frac{km}{h}\right)\hat{\imath}$$

<u>Cuando el bote va a favor de corriente :</u>

$$\vec{V}_{B/R} = 4.00\left(\frac{km}{s}\right)\hat{\imath}$$

Asi $\vec{V}_{B/T} = (2.80 + 4.00)\hat{\imath}\left(\frac{km}{h}\right) = (6.80)\hat{\imath}\left(\frac{km}{h}\right)$

Es decir recorre los primeros 1500 m a una velocidad de 6.80 km/h

Asi el tiempo que le toma en recorrer dicha distancia viene dada por la ecuación

$$1.50\ km = 6.80\left(\frac{km}{h}\right)t$$

$$t = \frac{1.50\ km}{6.80\left(\frac{km}{h}\right)} = 0.221\ h * \frac{60\ min}{1h} = 13.24\ min \text{ ida}$$

Cuando el bote va encontra de la corriente

$$\vec{V}_{R/T} = 2.80 \left(\frac{km}{h}\right) \hat{\imath}$$

$$\vec{V}_{B/R} = 4.00 \left(\frac{km}{s}\right) (-\hat{\imath})$$

$$\vec{V}_{B/T} = (2.80 - 4.00)\hat{\imath} \left(\frac{km}{h}\right) = (2.80)(-\hat{\imath}) \left(\frac{km}{h}\right)$$

Es decir recorre los segundos 1500 m a una velocidad de 1.20 km/h

Asi el tiempo que le toma en recorrer dicha distancia viene dada por la ecuación:

$$1.50\ km = 1.20 \left(\frac{km}{h}\right) t$$

$$t = \frac{1.50\ km}{1.20 \left(\frac{km}{h}\right)} = 1.25\ h * \frac{60\ min}{1h} = 75\ min \text{ vuelta}$$

Asi el tiempo total del hombre que va en bargo sera la suma del tiempo de ida mas el tiempo de vuelta

$$T_{total} = (75 + 13.24)min = 88.24\ min$$

Nota: Caminar resulta ser mas rápido que ir en bote. Camine más.

Problema #20

100. Un joven dentro de un ascensor observa que un bloque de 2 kg cuelga, en reposo, de un hilo atado al techo del ascensor. Para un observador inercial en Tierra el ascensor tiene una aceleración de 3 m/s^2 dirigida hacia abajo. La tensión del hilo en Newtons es

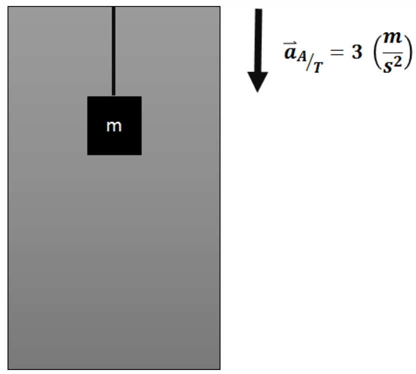
A) 26

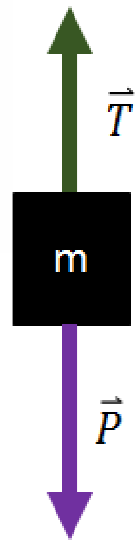
B) 20

C) 6

D) 7

E) 14





Definimos la direccion positiva en la direccion hacia abajo.

Diagrama de cuerpo libre sobre el bloque

Aplicación de la segunda Ley de Newton.

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}_y$$

Despejamos la Tensión

$$\vec{T} = m\vec{a}_y - \vec{P}$$

Escribimos los vectores en sus componenetes cartesianas.

$$-T = ma_y - (mg)$$

$$T = m(g - a_y)$$

Sustituimos

$$T = 2\,kg\,(10 - 3)\left(\frac{m}{s^2}\right) = 14\text{ N}$$

$$T = 14\text{ N}$$

Problema # 21

101. La figura muestra 3 bloques, de masa M cada uno, unidos con cuerdas tensas e ideales. Sobre el bloque superior actúa una fuerza que hace que todos los bloques se muevan con una aceleración de $2g$ hacia arriba respecto a Tierra. La tensión en la cuerda #1 es

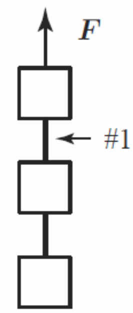
A) $2Mg$

B) $4Mg$

C) $3Mg$

D) $6Mg$

E) Mg



Solucion

Es claro que si las cuerdas son ideales carecen de masa. Luego podemos ver el sistema formado por los tres bloques como un solo sistema. Las cuerdas estan alli solo para unir dichos bloques. Y de paso confundirnos para que intentemos hacer un DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE sobre la cuerda. Sin embargo ha de saber que estos diagramas se hacen sobre el centro de masa. Si la cuerda no tiene masa, luego no tiene centro de masa y por tanto no es posible aplicar la idea del diagrama de cuerpo libre. Exceto si el diagrama de cuerpo libre no se hace en el centro de masa , sino en su centro geometrico, pero eso es otra historia ps.

Asi, sólo nos queda aplicar la segunda ley de Newton

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{F} = 3M2g = 6Mg$$

$$\vec{F} = 6Mg$$

Nota: y si calculas la tension que hay en la cuerda #2. ¿Tendrá la misma tensión?¿es otra cuerda no?

Problema # 22

102. En una superficie horizontal sin roce se apoyan 3 bloques, de masa M cada uno, unidos con cuerdas tensas ideales. Al bloque #3 se le aplica una fuerza horizontal de módulo $F = |\boldsymbol{F}|$, ver figura. La magnitud de la aceleración del bloque #1 es

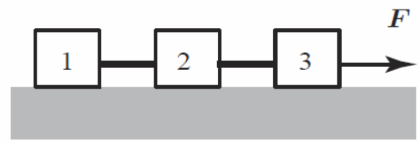
A) $F/(3M)$

B) F/M

C) $2F/(3M)$

D) cero

E) menor que la del bloque #3



Solucion: Notese mi sarcasmo con esto de
Las cuerdas ideales.

Problema # 23

104. En una superficie horizontal sin roce se apoyan 3 bloques, de la misma masa, unidos con cuerdas tensas ideales. Al bloque #3 se le aplica una fuerza horizontal de módulo $F = |\boldsymbol{F}|$, ver figura. La magnitud de la tensión en la cuerda que une los bloques #1 y #2 es

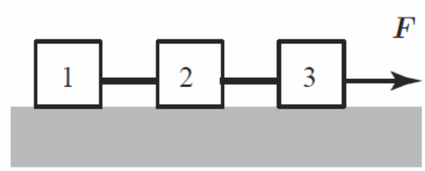
A) F

B) $F/3$

C) $F/2$

D) cero

E) $2F/3$



Solucion:

Que no confunda esto. De nuevo las cuerdas son ideales. Solo nos queda aplicar la segunda Ley de Newton.

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$$

$$F = 3a_x$$

Despejamos la aceleracion.

$$a_x = \frac{F}{3}$$

Nota: y si calculas la tension que hay en la cuerda que une los bloques 2 y 3. ¿Tendrá la misma tensión?¿es otra cuerda no?

Problema # 24

105. La figura muestra un bloque de 0.4 kg que se mantiene fijo contra la pared vertical por medio de la fuerza $\boldsymbol{F}$ de módulo 10 Newtons. El coeficiente de roce estático entre el bloque y la pared vale $\mu_e = 0.2$. La fuerza de roce que la pared ejerce sobre el bloque es de

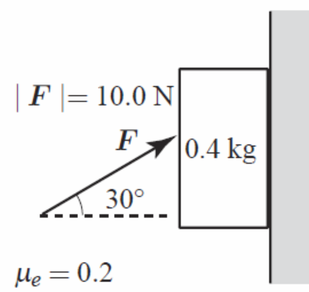
A) 1.0 N hacia arriba.

B) $\sqrt{3}$ N hacia abajo.

C) 1.0 N hacia abajo.

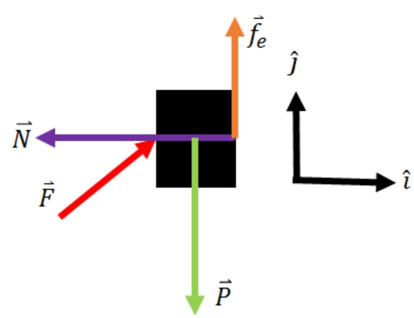
D) $\sqrt{3}$ N hacia arriba.

E) módulo 9.0 N



Solucion:

1. Definimos un sistema de referencia.
2. Realizamos un diagrama de cuerpo libre teniendo en cuenta que en principio no sabemos hacia donde va la fuerza de roce por ende la dibujamos para donde queramos.



3. Escribimos la segunda Ley de Newton

$$\sum \vec{F}_{neta} = m\vec{a}$$

$$\vec{N} + \vec{F} + \vec{f_e} + \vec{P} = m\vec{a}$$

4. Observamos las condiciones iniciales. Nos dicen que el bloque se mantiene fijo a la pared. Es decir no tiene aceleracion.

$$\vec{N} + \vec{F} + \vec{f_e} + \vec{P} = \vec{0}$$

5. Desconponemos todas las fuerzas según nuestro sistema de referencia seleccionado.

$$\vec{F} = F\cos 30\ \hat{\imath} + F\sin 30\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{N} = -N\hat{\imath}$$

$$\vec{f_e} = f_e\hat{\jmath}$$

$$\vec{P} = -P\hat{\jmath}$$

6. Igualamos los componentes de cada fuerza en $\hat{\imath}\ \hat{\jmath}$.

$$\begin{cases} \hat{\imath} \to F\cos 30 - N = 0 \\ \hat{\jmath} \to F\sin 30 + f_e - P = 0 \end{cases}$$

Recordamos que

$$\mathbf{P} = \mathbf{mg}$$

7. Como nos preguntan por la fuerza de roce estatico esta la tenemos en la ecuacion de componentes $\hat{\jmath}$

$$f_e = mg - F\sin 30$$

$$f_e = 0.4\,(kg)10\,\left(\frac{m}{s^2}\right) - 10\mathrm{N}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f_e = -1\mathrm{N}$$

Nota: el signo menos en nuestra respuesta significa que la fuerza de roce no va en la direccion en la que la hemos dibujado sino en la direccion contrararia.

Asi, La fuerza de roce es una fuerza paralela a la superficie cuya magnitud es de 1 N y apunta en la direccion $-\hat{\jmath}$ según nuestro sistema de referencia seleccionado.

Problema #25

108. Un bloque de 3 kg se apoya sin deslizar sobre otro de 6 kg que a su vez desliza sobre una superficie lisa horizontal (ver figura). Los bloques están acelerados por medio de una fuerza horizontal, $F = 3$ N, aplicada al bloque inferior. El coeficiente de roce estático entre los bloques vale 0.1 . El módulo de la fuerza de roce, en Newtons, entre los bloques es

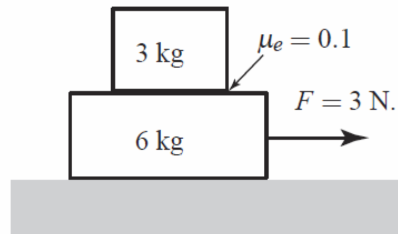
A) 3

B) 9

C) 2

D) 1

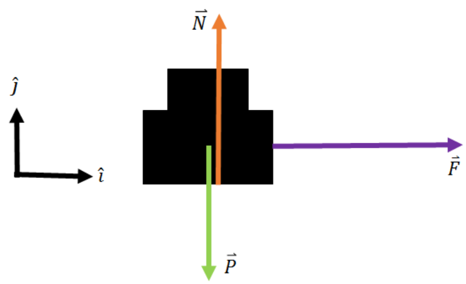
E) 0



Solución.

Nos dicen que los bloques estan acelerados por medio de una fuerza horizontal.

Calculamos dicha aceleración teniendo en cuenta que veremos los bloques como un solo bloque.



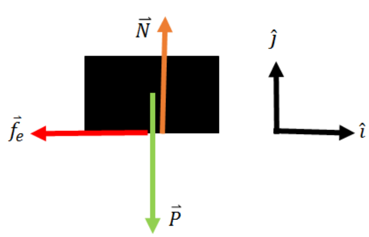
En este caso nos interesa solo las fuerzas horizontales considerando que el bloque no acelera en direccion $\hat{\jmath}$

$$\sum \vec{F}_x = (m_1 + m_2)\vec{a}_x$$

$$3 \text{ N} = (3+6)\text{kg}\, \vec{a}_x$$

$$\vec{a}_x = \frac{3 \text{ N}}{9\, kg} = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Ya tenemos la aceleracion de todo el sistema. Ahora observamos detenidamente el bloque de masa 3 kg



Nos interesa las fuerzas en el eje x

$$\sum \vec{F}_x = (m_1)\vec{a}_x$$

$$-f_e = 3 \text{ kg}\, \frac{1}{3}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$f_e = -1 \text{ N}$$

Y de nuevo no tenemos suerte a la hora de pintar la fuerza de rose ☹ … Pero sabemos que va en sentido opuesto de donde la pintamos, con direccion paralela al bloque de 6 kg y con modulo 1 N

Problema # 26

111. Un bloque de 2 kg se coloca sobre un plano inclinado 60° respecto a la horizontal y fijo a Tierra. Si el bloque desliza a velocidad constante el coeficiente de roce dinámico entre el bloque y la superficie es

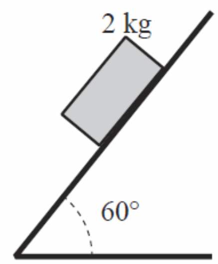
A) $1/\sqrt{3}$

B) $\sqrt{3}/2$

C) $1/2$

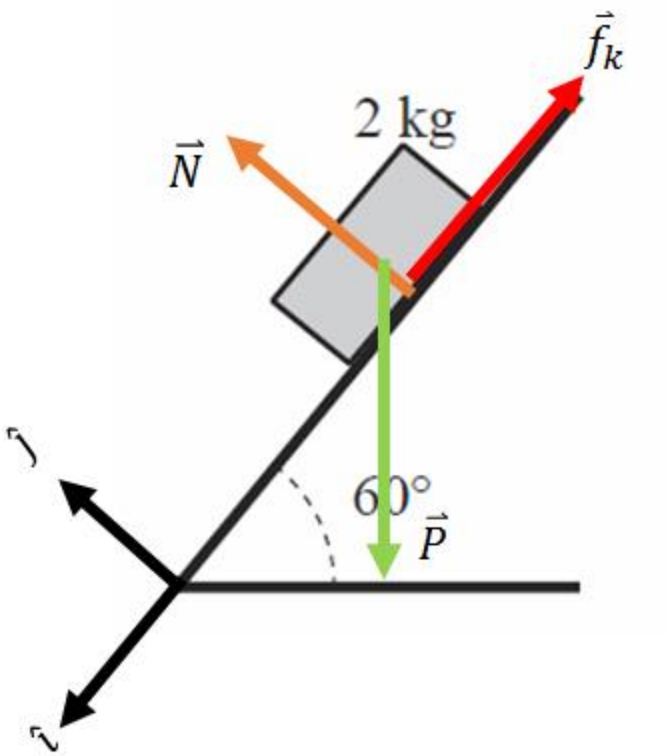
D) 0

E) $\sqrt{3}$



Solucion: Si el bloque desliza a velocidad contante entonces el bloque no posee aceleracion en el sentido del movimiento.

1. Fijamos un sistema de referencia.
2. Realizamos un diagrama de cuerpo libre.



Escribimos la Segunda Ley de Newton

$$\sum \vec{F}_{neta} = m\vec{a}$$

Pero nos dicen que el bloque baja con velocidad constante

Luego :

$$\sum \vec{F}_{neta} = \vec{0}$$

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_k = 0$$

Descomponemos todas las fuerzas según el sistema elegido.

$$\vec{\mathrm{N}} = \mathrm{N}\hat{\jmath}$$
$$\vec{f}_k = -f_k\hat{\imath}$$

$$\vec{P} = mg(\sin 60\hat{\imath} - \cos 60\hat{\jmath})$$

Igualamos las ecuaciones en i y en j

$$N - mg\cos 60 = 0 \ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$mg\sin 60 - f_k = 0 \ldots\ldots\ldots..(2)$$

De la ecuacion (1) sabemos que

$$N = mg\cos 60$$

$$N = 2\,Kg * 10\left(\frac{m}{s^2}\right) * \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$N = 10\text{ N}$$

De la ecuacion (2) sabemos que

$$f_k = mg\sin 60$$

$$f_k = 2kg * 10\left(\frac{m}{s^2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f_k = 10\sqrt{3}\text{N}$$

Por otro lado sabemos que

$$f_k = \mu_k * N$$

$$\mu_k = \frac{f_k}{N} = \frac{10\sqrt{3}\text{N}}{10\text{ N}} = \sqrt{3}$$

$$\mu_k = \sqrt{3}$$

Nota: La fuerza de roce cinetica dio positiva ☺ . La dibujamos bien. Estamos mejorando nuestros dibujos ☺.

Problema # 27

112. El diagrama muestra una partícula rotando con rapidez constante. En el punto A las direcciones de: la fuerza neta $\boldsymbol{F}$ sobre la partícula y su aceleración $\boldsymbol{a}$ son

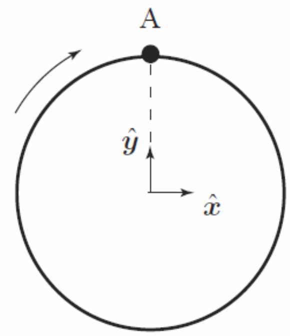
A) $\boldsymbol{F} = F_x \hat{x}$ $\quad \boldsymbol{a} = a_x \hat{x}$

B) $\boldsymbol{F} = -|\boldsymbol{F}|\hat{y}$ $\quad \boldsymbol{a} = -|\boldsymbol{a}|\hat{y}$

C) $\boldsymbol{F} = +|\boldsymbol{F}|\hat{y}$ $\quad \boldsymbol{a} = -|\boldsymbol{a}|\hat{y}$

D) $\boldsymbol{F} = F_x \hat{x}$ $\quad \boldsymbol{a} = 0$

E) $\boldsymbol{F} = F_y \hat{y}$ $\quad \boldsymbol{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y}$ con $a_x \neq 0$



Solucion

Nos dice que la particula esta rotando con rapidez constante. Luego no hay aceleracion… Buuuu… Nou. Si hay aceleración dado que se mueve en un circulo.

Su aceleracion es radial y hacia el centro. Es decir en la dirección $-\hat{y}$. No tiene aceleracion tangencial, es decir en la direccion $\hat{x}$

Luego la unica opcion posible es la letra B.

Problema # 28

113. Un carro de una montaña rusa tiene masa M y realiza un giro vertical completo de radio R. Calcule la normal que siente el carro en el punto más bajo si allí su rapidez es v.

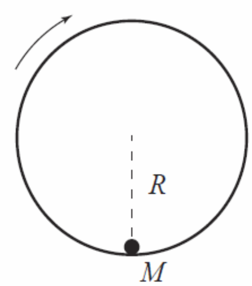
A) $N = Mg$

B) $N = M(g + v^2/R)$

C) $N = M(g - v^2/R)$

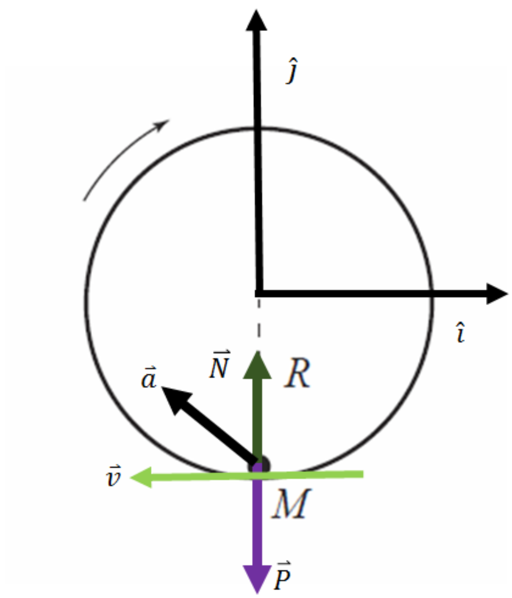
D) $N = M(g - 2v^2/R)$

E) $N = Mv^2/R$



Nos nos dicen que se mueve con rapidez contante por ende debemos asumir el movimiento más general posible. Es decir, que posea aceleracion tangencial. Consideremos el caso sin rose.

Fijamos un sistema de referencia y realizamos un diagrama de cuerpo libre.



Escribimos la segunda ley de Newton.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Descomponemos las fuerzas.

$$\vec{N} = N\hat{\jmath}$$

$$\vec{P} = -mg\hat{\jmath}$$

Y notamos que la aceleracion siempre la podemos descomponer en su componente tangencia y centripeta.

$$\vec{a} = -a_t\hat{\imath} + a_c\hat{\jmath}$$

Como solo nos interesa hallar la normal.

$$N - mg = ma_c$$

Pero,

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Entonces,

$$N - mg = m\frac{v^2}{R}$$

Finalmente,

$$N = mg + m\frac{v^2}{R}$$

Sacando factor común m

$$N = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right)$$

Problema #29

114. Un objeto de masa M desliza hacia abajo y sin roce sobre una superficie esférica fija respecto a Tierra, de radio R y centro en O. Para el instante mostrado suponga que la rapidez del objeto respecto a la superficie es v y halle **el módulo de la fuerza normal**, supuesta no nula, entre la superficie y el objeto.

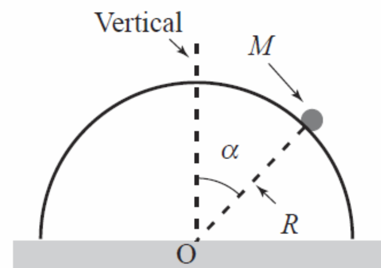
A) $Mg\cos(\alpha) - Mv^2/R$

B) $Mg\cos(\alpha) + Mv^2/R$

C) $-Mg\cos(\alpha) + Mv^2/R$

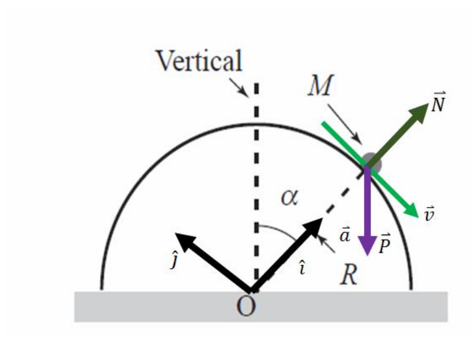
D) $Mg\,\mathrm{sen}(\alpha) - Mv^2/R$

E) $Mg\cos(\alpha)$



Solucion

Fijamos un sistema de referencia y realizamos el diagrama de cuerpo libre.



Escribimos la segunda ley de newton

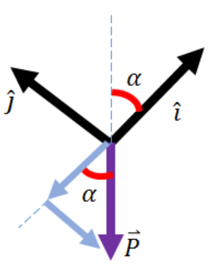
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Descomponemos las fuerzas según nuestro sistema elejido.

$$\vec{N} = N\hat{\imath}$$

$$\vec{P} = -mg(\cos\alpha\,\hat{\imath} + \sin\alpha\,\hat{\jmath})$$



Ademas, sabemos que la aceleracion siempre la podemos descomponer en su forma centripeta (radial y hacia el centro) y tangencial (paralela a la velocidad)

$$\vec{a} = a_c(-\hat{\imath}) + a_t\hat{\jmath}$$

Sustituimos todo en i y en j

$$\begin{cases} N - mg\cos\alpha = -ma_c \;\ldots\ldots..(1) \\ \quad -mg\sin\alpha = ma_t \;\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Pero

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Sustituyendo en …(1)

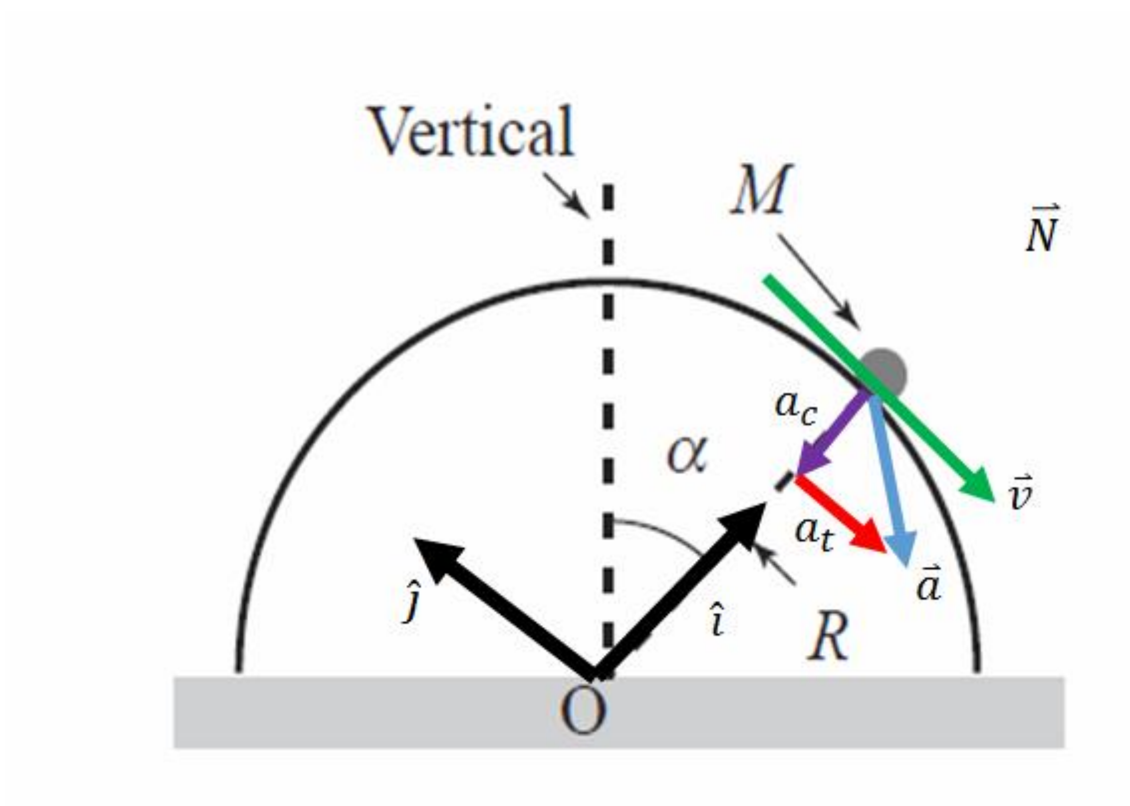
$$N - mg\cos\alpha = -m\frac{v^2}{R}$$

Despejamos N

$$N = mg\cos\alpha - m\frac{v^2}{R}$$

$$N = m\left(g\cos\alpha - \frac{v^2}{R}\right)$$

Nota importante: Observe que la ecuacion …(2) nos esta diciendo que la componente tangencial de la velocidad para el angulo donde se encuentra la particula es negativa. Y ello concuerda con el siguiente dibujo que hubiesemos podido colocar a priori de la aceleración.



Problema #30

115. Un péndulo de 12 m de longitud tiene atado en su extremo libre una piedra de 2 kg. En cierto instante la piedra tiene una rapidez de 6 m/s y el péndulo forma un ángulo de 60° con la vertical hacia abajo. Si T es el módulo de la tensión del hilo en ese instante, entonces

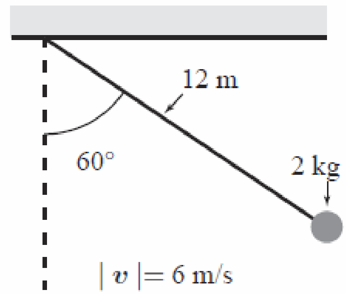
A) $T = (10\sqrt{3} + 6)$ N.

B) $T = 4$ N.

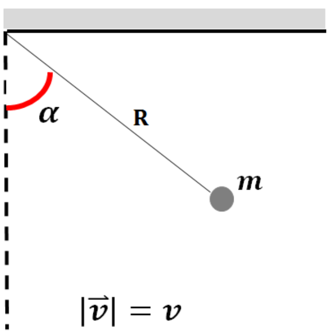
C) $T = (10\sqrt{3} - 6)$ N.

D) $T = 16$ N.

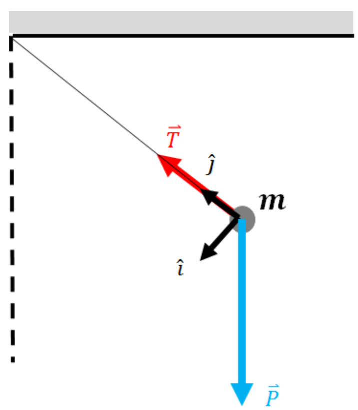
E) ninguna de las opciones anteriores es cierta.



Solucion: Recomiendo hacer el ejercicio con el siguiente dibujo y luego sustituir las cantidades númericas.



Como siempre, fijamos un sistema de referencia y realizamos un diagrama de cuerpo libre sobre la particula m



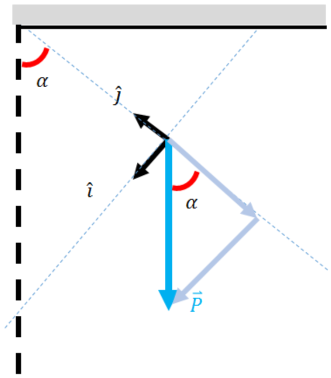
Escribimos la segunda ley de newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Descomponemos las fuerzas según nuestro sistema de referencia seleccionado.

$$\vec{T} = T\hat{\jmath}$$



$$\vec{P} = mg(\sin\alpha\,\hat{\imath} - \cos\alpha\hat{\jmath})$$

Ademas, sabemos que la aceleracion siempre la podemos descomponer en su forma centripeta (radial y hacia el centro) y tangencial (paralela a la velocidad)

$$\vec{a} = a_c(\hat{\jmath}) + a_t\hat{\imath}$$

Sustituimos todas las fuerzas en las ecuaciones escalares tanto en i como en j

$$\begin{cases} mg\sin\alpha = ma_t \;\; \ldots\ldots(1) \\ T - mg\cos\alpha = ma_c \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Pero

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Sustituyendo en …(2)

$$T - mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{R}$$

Despejamos T

$$T = mg\cos\alpha + m\frac{v^2}{R}$$

$$T = m\left(g\cos\alpha + \frac{v^2}{R}\right)$$

Sustitmos las cantidades numéricas

$$T = 2kg\left[10\left(\frac{m}{s^2}\right)\cos 60° + \frac{\left(6\left(\frac{m}{s}\right)\right)^2}{12\,(m)}\right]$$

$$T = 2kg\left[10\left(\frac{m}{s^2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{36\left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{12(m)}\right]$$

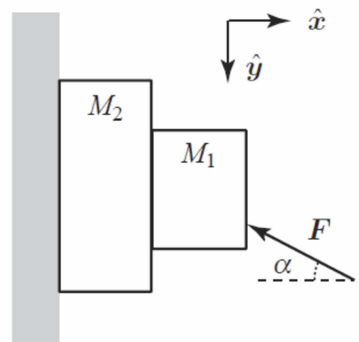
$$T = 2kg\left[\,5\left(\frac{m}{s^2}\right) + 3\left(\frac{m}{s^2}\right)\right]$$

$$T = 2kg\left[8\left(\frac{m}{s^2}\right)\right]$$

$$T = 16\text{ N}$$

Problema #31

120. Un bloque de masa M_2 se apoya en una pared vertical lisa y otro bloque de masa M_1 se apoya sobre el primero. Un agente aplica una fuerza $\boldsymbol{F}$ sobre M_1 como se indica en la figura. Suponga que hay roce entre los dos bloques y éstos no deslizan entre sí.

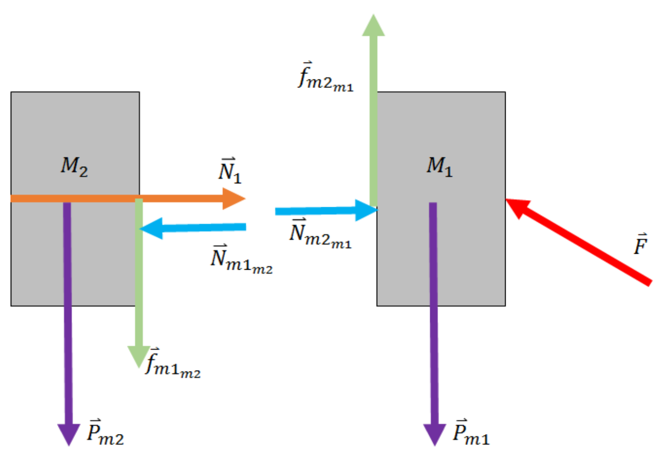


a. Dibuje por separado el diagrama de cuerpo libre de los dos bloques. Identifique claramente las diferentes fuerzas.

b. Escriba las ecuaciones de movimiento para cada bloque.

c. Tome $M_1 = 1$ kg, $M_2 = 2$ kg, $\alpha = 30°$ y $|\boldsymbol{F}| = 12$ N. Halle los vectores: aceleración de M_1 y fuerza de roce sobre M_1. Determine cuáles son los valores posibles del coeficiente de roce estático.

Solución: En este caso el dibujo ya ha determinado un sistema de referencia. Asi que realizaremos los diagramas de cuerpo libre.



$$\vec{N}_1 = la\ fuerza\ que\ hace\ la\ pared\ al\ bloque\ m2$$

$$\vec{P}_{m2} = el\ peso\ del\ bloque\ de\ masa\ m2$$

$$\vec{f}_{m1_{m2}} = la\ fuerza\ de\ friccion\ que\ ejerce\ m1\ sobre\ m2$$

$$\vec{N}_{m1_{m2}} = la\ fuerza\ normal\ que\ ejerce\ m1\ sobre\ m2$$

$$\vec{N}_{m2_{m1}} = la\ fuerza\ normal\ que\ ejerce\ m2\ sobre\ m1$$

$$\vec{f}_{m2_{m1}} = la\ fuerza\ de\ friccion\ que\ ejerce\ m2\ sobre\ m1$$

$$\vec{F} = la\ fuerza\ del\ agente\ sobre\ m1$$

Escribimos las leyes de Newton

Segunda ley de Newton

Para la masa m2

$$\sum \vec{F} = m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{P}_{m2} + \vec{f}_{m1_{m2}} + \vec{N}_1 + \vec{N}_{m1_{m2}} = m_2\vec{a}_2$$

Para la masa m1

$$\sum \vec{F} = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{P}_{m1} + \vec{f}_{m2_{m1}} + \vec{N}_{m2_{m1}} + \vec{F} = m_2\vec{a}_2$$

Tercera ley de Newton (Acción – Reaccion)

$$\vec{N}_{m1_{m2}} = -\vec{N}_{m2_{m1}} = N_{m1_{m2}}$$

$$\vec{f}_{m1_{m2}} = -\vec{f}_{m2_{m1}} = f_{m1_{m2}}$$

Descomponemos todas las fuerzas involucradas según el sistema de cordenadas elegido.

$$\vec{P}_{m2} = m_2 g \ \ \hat{y}$$

$$\vec{f}_{m1_{m2}} = f_{m1_{m2}} \ \ \hat{y}$$

$$\vec{N}_1 = N_1 \, \hat{x}$$

$$\vec{N}_{m1_{m2}} = \ N_{m1_{m2}}(-\hat{x})$$

$$\vec{P}_{m1} = \ m_1 g \, \hat{y}$$

$$\vec{f}_{m2_{m1}} = f_{m2_{m1}} \, (-\hat{y})$$

$$\vec{N}_{m2_{m1}} = N_{m2_{m1}}(\hat{x})$$

$$\vec{F} = F\cos\alpha \, (-\hat{x}) + F\sin\alpha \, (-\hat{y})$$

Armamos las ecuaciones escalares de las fuerzas.

Para m2

$$N_1 - N_{m1_{m2}} = 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots1$$

$$m_2 g + f_{m1_{m2}} = m_2 a_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots2$$

$$N_{m1_{m2}} - F\cos\alpha = 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots3$$

$$m_1 g - f_{m1_{m2}} - F\sin\alpha = m_1 a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots4$$

Tenemos 4 ecuaciones y 5 incognitas a saber : $N_1, N_{m1_{m2}}, f_{m1_{m2}}, a_2, a_3$

Y entonces aun no tiene solución.

Vemos fijamente a los ojos el sistema y no percatamos de un tercer vinculo cinematico. LOS BLOQUES NO DESLIZAN ENTRE SI. Es decir, si uno acelera el otro lo hará tambien.

Asi el vinculo que resuelve las ecuaciones es la observacion.

$$a_1 = a_2 = a = g - \frac{F\sin\alpha}{(m_1 + m_2)}$$

Ya todo tiene solución. 4 ecuaciones y 4 incognitas. Mate III nos dice que se puede solucionar. Las ecuaciones quedan finalmente.

$$N_1 - N_{m1_{m2}} = 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots1^*$$

$$m_2 g + f_{m1_{m2}} = m_2 a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots2^*$$

$$N_{m1_{m2}} - F\cos\alpha = 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots3^*$$

$$m_1 g - f_{m1_{m2}} - F\sin\alpha = m_1 a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots4^*$$

Luego podemos hacer lo que queramos con estas ecuaciones

Por ejemplo sumar 2 y 4

$$m_2 g + f_{m1_{m2}} = m_2 a$$

$$\underline{m_1 g - f_{m1_{m2}} - F\sin\alpha = m_1 a}$$

$$(m_1 + m_2)g - F\sin\alpha = (m_1 + m_2)a$$

De donde

$$a = g - \frac{F\sin\alpha}{(m_1+m_2)} \ldots\ldots\ldots..(5)$$

Sustituyendo en (2)

$$m_2 g + f_{m1_{m2}} = m_2\left(g - \frac{F\sin\alpha}{(m_1+m_2)}\right)$$

Despejando la fuerza de rose,

$$f_{m1_{m2}} = m_2\left(g - \frac{F\sin\alpha}{(m_1+m_2)}\right) - m_2 g$$

$$f_{m1_{m2}} = \left(\frac{-m_2 F\sin\alpha}{(m_1+m_2)}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Pero como nos piden la fuerza de roce sobre m1 entonces recordamos que

$$f_{m1_{m2}} = -f_{m2_{m1}}$$

$$f_{m2_{m1}} = \left(\frac{m_2 F\sin\alpha}{(m_1+m_2)}\right)$$

Sustituyendo los valores dado por el problema

$$f_{m2_{m1}} = \left(\frac{2kg * 12\text{N}\sin 30°}{(1+2)kg}\right)$$

$$f_{m2_{m1}} = \frac{12kg * \text{N}}{3kg}$$

$$f_{m2_{m1}} = 4\text{ N}$$

Sustituyendo (6) en (4) podemos hallar la aceleración de la particula 1

$$m_1 g + \left(\left(\frac{m_2 F\sin\alpha}{(m_1+m_2)}\right) - \right) F\sin\alpha = m_1 a_1$$

$$a_1 = \left(g + \frac{m_2 F\sin\alpha}{(m_1+m_2)m_1} - \frac{F\sin\alpha}{m_1}\right)$$

$$a_1 = \left(10\left(\frac{m}{s^2}\right) + \frac{2\ kg * 12\text{ N}\sin 30°}{(1kg+2kg)1kg} - \frac{12\text{ N}\sin 30°}{1kg}\right)$$

$$a_1 = \left(10\left(\frac{m}{s^2}\right) + \frac{12\text{N} * \text{kg}}{3(kg)^2} - \frac{6\text{N}}{kg}\right)$$

$$a_1 = \left(10\left(\frac{m}{s^2}\right) + 4\left(\frac{m}{s^2}\right) - 6\left(\frac{m}{s^2}\right)\right)$$

$$a_1 = (10 - 2)\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$a_1 = 8\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Por último, para derterminar los valores posibles del coeficiente de rose estatico basta con recordar que,

$$|f_r| \leq \mu_e |N|$$

Sustituyendo,

$$\left|\frac{m_2 F \sin\alpha}{(m_1 + m_2)}\right| \leq \mu_e |F\cos\alpha|$$

$$\mu_e \geq \left|\frac{m_2 \tan\alpha}{(m1 + m2)}\right|$$

Sustituyendo las cantidades númericas,

$$\mu_e \geq \left|\frac{2\ kg \tan 30°}{3\ kg}\right|$$

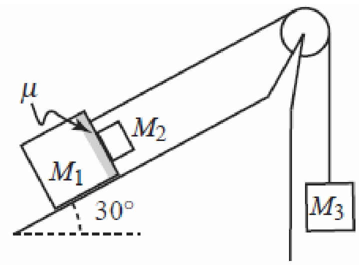
$$\mu_e \geq \left|\frac{2}{3\sqrt{3}}\right|$$

$$\mu_e > \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Nota: en la respuesta final se le quita el “ mayor o igual” y solo se deja el mayor estricto esto debido a que en el limite desliza y no queremos que deslise

Problema #32

121. En el sistema de la figura la cuerda y la polea son ideales y los bloques tienen masas $M_1 = 4$ kg, $M_2 = 2$ kg y $M_3 = 12$ kg. El bloque M_2 se apoya sobre el bloque M_1; hay roce entre ellos pero no deslizamiento, siendo μ el coeficiente de roce estático. El plano inclinado es liso.

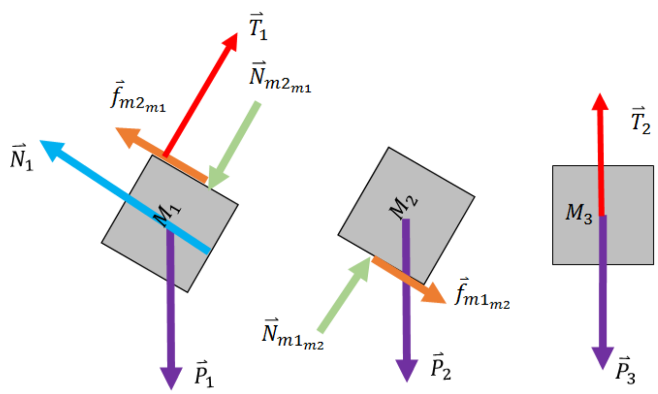


a. Para cada cuerpo dibuje el diagrama de fuerzas y escriba las ecuaciones de movimiento.

b. Halle los módulos de las siguientes cantidades: la aceleración de los bloques, la tensión en la cuerda, la fuerza de roce F_r, la normal H entre M_1 y M_2 y la normal N entre M_1 y el plano inclinado.

c. Halle los valores permitidos para el coeficiente de roce μ.

Solucion parte a)



$$\vec{N}_1 = la\ fuerza\ que\ hace\ la\ cuña\ al\ bloque\ m1$$

$$\vec{P}_1 = el\ peso\ del\ bloque\ de\ masa\ m_1$$

$$\vec{f}_{m2_{m1}} = la\ fuerza\ de\ friccion\ que\ ejerce\ m2\ sobre\ m1$$

$$\vec{T}_1 = la\ fuerza\ de\ tension\ sobre\ m1$$

$$\vec{N}_{m2_{m1}} = la\ fuerza\ normal\ que\ ejerce\ m2\ sobre\ m1$$

$$\vec{N}_{m1_{m2}} = la\ fuerza\ normal\ que\ ejerce\ m1\ sobre\ m2$$

$$\vec{f}_{m1_{m2}} = la\ fuerza\ de\ friccion\ que\ ejerce\ m1\ sobre\ m2$$

$$\vec{P}_2 = el\ peso\ del\ bloque\ de\ masa\ m_2$$

$$\vec{P}_3 = el\ peso\ del\ bloque\ de\ masa\ m_3$$

$$\vec{T}_2 = la\ fuerza\ de\ tension\ sobre\ m_3$$

Aplicamos la segunda y tercera ley de Newton

$$\vec{N}_1 + \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{f}_{m2_{m1}} + \vec{N}_{m2_{m1}} = m_1\vec{a}_1$$

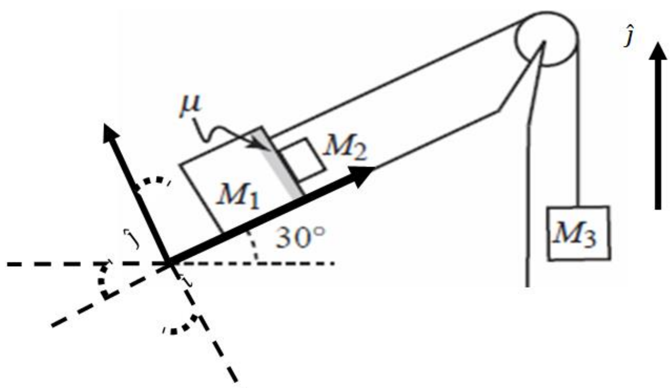
$$\vec{P}_2 + \vec{f}_{m1_{m2}} + \vec{N}_{m1_{m2}} = m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{P}_3 + \vec{T}_2 = m_3\vec{a}_3$$

$$\vec{f}_{m2_{m1}} = -\vec{f}_{m1_{m2}} \ , \ -\vec{N}_{m2_{m1}} = \vec{N}_{m1_{m2}}$$

Descomponemos todas las fuerzas según un sistema de referencia "adecuado"

Se da este dibujo como ayuda



<u>Nota Super importante:</u> La fuerza de tension es una fuerza que a priori sabemos hacia donde "apunta". Si una es positiva entonces la otra debe ser positiva. Es decir las cuerdas deben estar alineadas con los sistemas de referencia elegidos.

$$N_1(\hat{\jmath}) + m_1 g[\sin\theta\,(-\hat{\imath}) + \cos\theta\,(-\hat{\jmath})] + T_1(\hat{\imath}) + f_{m2_{m1}}(\hat{\jmath}) + N_{m2_{m1}}(-\hat{\imath}) = m_1 a_1(\hat{\imath})$$

$$m_2 g[\sin\theta\,(-\hat{\imath}) + \cos\theta\,(-\hat{\jmath})] + f_{m1_{m2}}(-\hat{\jmath}) + N_{m1_m}(\hat{\imath}) = m_2 a_2(\hat{\imath})$$

$$m_3 g(-\hat{\jmath}) + T_2(\hat{\jmath}) = m_3 a_3(\hat{\jmath})$$

$$\left|\vec{f}_{m2_{m1}}\right| = \left|-\vec{f}_{m1_{m2}}\right| = f$$

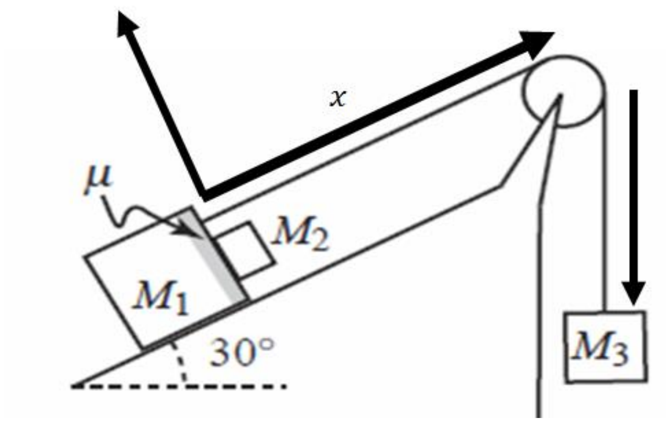
$$\left|\vec{N}_{m1_{m2}}\right| = \left|-\vec{N}_{m2_{m1}}\right| = \text{N°}$$

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T$$

<u>Ligaduras</u>

$a_1 = a_2 = a$ esto debido a que el bloque m2 no desliza sobre m1.

$a = -a_3$ esto debido a la siguiente situacion geometrica.



Considere que el largo de la cuerda tiene una longitud ℓ

Es posible escribir entonces

$$\ell = x + y + s$$

Donde "x" en la longitud de la cuerda a lo largo del plano inclinado, "y" la longitud de la cuerda a lo largo de m3 y "s" la longitud de la cuerda que queda enrollada en la polea.

Es claro que a medida que pasa el tiempo la longitud de la cuerda en "x" y en "y" se alarga o se acorta de acuerdo hacia donde es el movimiento.

Asi es posible derivar dos veces respecto al tiempo y obtener las aceleraciones de la longitudes de las cuerdas que a su ves estan sujetas a las masas m1 y m3.

$$0 = \ddot{x} + \ddot{y}$$

$$\ddot{x} = -\ddot{y}$$

Ahora convertimos las ecuaciones vectoriales en ecuaciones escalares.

$$T - m_1 g \sin\theta - N° = m_1 a \qquad \ldots\ldots \mathbf{1}$$

$$N_1 - m_1 g \cos\theta + f = 0 \qquad \ldots\ldots .\mathbf{2}$$

$$N° - m_2 g \sin\theta = m_2 a \qquad \ldots\ldots \mathbf{3}$$

$$-m_2 g \cos\theta - f = 0 \qquad \ldots ...\mathbf{4}$$

$$T - m_3 g = -m_3 a \qquad \ldots ...\mathbf{5}$$

¡¡¡Listooo que nos pregunten lo que quieran!!!

Por ejemplo queremos hallar la aceleración total del sistema.

Tomamos la ecuacion 1 se la sumamos a 3. Luego la restamos con 5. ¿ por que? Y porque estas son las tres ecuaciones que tienen la variable que estamos buscando

$$T - m_1 g \sin\theta \cancel{- N°} = m_1 a$$

$$\cancel{N°} - m_2 g \sin\theta = m_2 a$$

$$\overline{T - (m_1 + m_2) g \sin\theta = (m_1 + m_2) a}$$

$$\cancel{T} - (m_1 + m_2)g\sin\theta = (m_1 + m_2)a$$

$$\cancel{-T} + m_3 g = +m_3 a$$

$$m_3 g - (m_1 + m_2)g\sin\theta = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$a = \frac{m_3 g - (m_1 + m_2)g\sin\theta}{(m_1 + m_2 + m_3)}$$

Sustituimos las cantidades númericas

$$a = \frac{12\;kg * 10\left(\frac{m}{s^2}\right) - (4kg + 2kg) * 10\left(\frac{m}{s^2}\right) * \sin 30}{(4kg + 2kg + 12kg)}$$

$$a = \frac{120\text{N} - 30\text{N}}{18\;kg}$$

$$a = 5\;\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Ahora queremos conocer el modulo de la tension en la cuerda

Sumamos las ecuaciones 1,2 y 5

$$T - m_1 g\sin\theta \cancel{- N°} = m_1 a$$

$$\cancel{N°} - m_2 g\sin\theta = m_2 a$$

$$T - m_3 g = -m_3 a$$

$$2T - (m_1 + m_2)g\sin\theta - m_3 g = (m_1 + m_2 - m_3)a$$

$$T = \left[\frac{(m_1 + m_2)g\sin\theta + m_3 g + (m_1 + m_2 - m_3)a}{2}\right]$$

Sustituyendo las cantidadades númericas

$$T = \left[\frac{(4kg + 2kg) * 10\left(\frac{m}{s^2}\right) * \sin 30 + 12kg * 10\left(\frac{m}{s^2}\right) + (4kg + 2kg - 12kg)5\left(\frac{m}{s^2}\right)}{2}\right]$$

$$T = \frac{30\text{ N} + 120\text{ N} - 30\text{ N}}{2}$$

$$T = \frac{120\text{ N}}{2}$$

$$T = 60\text{ N}$$

De la ecuacion 4 podemos hallar la fuerza de rose

$$-m_2 g\cos\theta - f = 0$$

$$f = -m_2 g\cos\theta$$

Sustituyendo las cantidades númericas

$$f = -2kg * 10\left(\frac{m}{s^2}\right) * \cos 30°$$

$$f = -10\sqrt{3}\text{ N}$$

De la ecuacion 3 podemos hallar la normal entre los bloque m1 y m2

$$N° - m_2 g\sin\theta = m_2 a$$

$$N° = m_2(g\sin\theta + a)$$

Sustituyendo las cantidades númericas

$$N° = 2kg\left(10\left(\frac{m}{s^2}\right) * \sin 30 + 5\left(\frac{m}{s^2}\right)\right)$$

$$N° = 2kg\left(10\left(\frac{m}{s^2}\right)\right)$$

$$N° = 20\text{ N}$$

De la ecuacion 2 podemos hallar el valor de la fuerza normal que ejerce la cuña sobre m1

$$N_1 - m_1 g\cos\theta + f = 0$$

$$N_1 = m_1 g\cos\theta - f$$

$$N_1 = m_1 g\cos\theta - (-m_2 g\cos\theta)$$

$$N_1 = (m_1 + m_2)g\cos\theta$$

Sustituyendo las cantidades númericas

$$N_1 = (4kg + 2kg) * 10\left(\frac{m}{s^2}\right)\cos 30°$$

$$N_1 = 6kg * 10\left(\frac{m}{s^2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$N_1 = 30\sqrt{3}\ \text{N}$$

Parte c) Nos preguntan por el rango de valores que puede tener $\mu_e$entre los bloques m1 y m2
Sabemos que

$$|f| \leq \mu_e|N°|$$

Sustituyendo

$$|-m_2 g\cos\theta| \leq \mu_e|m_2(g\sin\theta + a)|$$

Entonces

$$\mu_e \geq \left|\frac{-m_2 g\cos\theta}{m_2(g\sin\theta + a)}\right|$$

$$\mu_e \geq \left|\frac{-g\cos\theta}{(g\sin\theta + a)}\right|$$

Sustituyendo las cantidades númericas

$$\mu_e \geq \left|\frac{-10\left(\frac{m}{s^2}\right)\cos 30°}{10\left(\frac{m}{s^2}\right)\sin 30° + 5\left(\frac{m}{s^2}\right)}\right|$$

$$\mu_e \geq \left|\frac{-10\left(\frac{m}{s^2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{10\left(\frac{m}{s^2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{m}{s^2}\right)}\right|$$

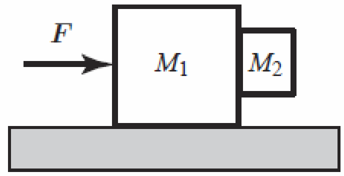
$$\mu_e \geq \left|\frac{-5\sqrt{3}\left(\frac{m}{s^2}\right)}{10\left(\frac{m}{s^2}\right)}\right|$$

$$\mu_e \geq \left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \leq \mu_e \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Problema # 33

118. En el sistema de la figura se conocen las masas de los dos bloques y no hay deslizamiento entre ellos, siendo μ_e el coeficiente de roce estático entre los bloques. Suponga que la fuerza $\boldsymbol{F}$ aplicada al sistema es horizontal y que no existe roce sobre la superficie horizontal.

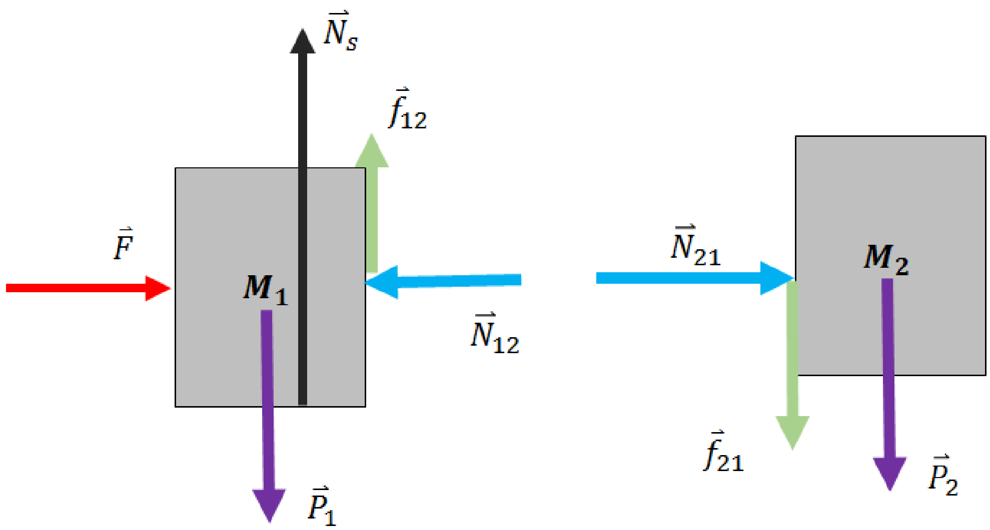


a. Dibuje por separado el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los dos cuerpos involucrados. Identifique claramente las diferentes fuerzas.

b. Escriba las ecuaciones de movimiento para cada una de las dos masas.

c. ¿ Cuál es el rango de valores permitidos para el módulo de $\boldsymbol{F}$ de manera que el cuerpo de masa M_2 no resbale ?

Solucion parte a)



$$\vec{N}_s = \ fuerza\ que\ ejerce\ la\ superficia\ sobre\ M1$$

$$\vec{P}_1 = el\ peso\ de\ M1$$

$$\vec{f}_{12} = fuerza\ de\ rose\ sobre\ M1\ debido\ a\ M2$$

$$\vec{N}_{12} = fuerza\ que\ normal\ sobre\ M1\ debido\ a\ M2$$

$$\vec{F} = fuerza\ externa\ sobre\ M1$$

$$\vec{f}_{21} = fuerza\ de\ rose\ sobre\ M2\ debido\ a\ M1$$

$$\vec{N}_{21} = fuerza\ que\ normal\ sobre\ M2\ debido\ a\ M1$$

$$\vec{P}_2 = el\ peso\ de\ M2$$

Solucion parte b) Escribimos la segunda y tercera ley de Newton

$$\vec{F} + \vec{P}_1 + \vec{N}_S + \vec{f}_{12} + \vec{N}_{12} = m_1\vec{a}_1$$

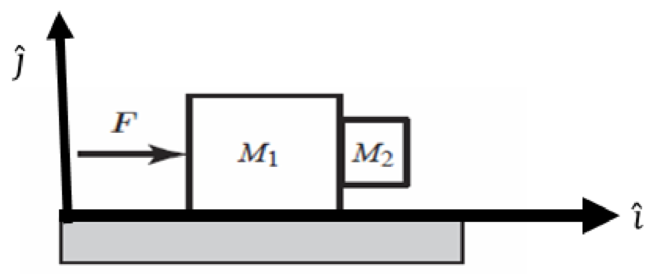
$$\vec{N}_{21} + \vec{P}_2 + \vec{f}_{21} = m_2\vec{a}_2$$

$$-\vec{N}_{12} = \vec{N}_{21}$$

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

Descomponemos todas las fuerzas según un sistema de referencia "adecuado"

Se da este dibujo como ayuda



$$F(\hat{\imath}) + mg(-\hat{\jmath}) + N_s(\hat{\jmath}) + f_{12}(\hat{\jmath}) + N_{12}(-\hat{\imath}) = m_1a_1(\hat{\imath})$$

$$N_{21}(\hat{\imath}) + m_2g(-\hat{\jmath}) + f_{21}(-\hat{\jmath}) = m_2a_2(\hat{\imath})$$

$$N_{21} = N_{12} = N$$

$$f_{21} = f_{12} = f$$

Ligadura: no hay deslizamiento entre las masas luego si una acelera la otra le siguie ☺

$$a_1 = a_2 = a$$

Ecuaciones escalares:

$$F - N = m_1a \qquad \dots..(1)$$

$$N_s - m_1g + f = 0 \quad .\dots.(2)$$

$$N = m_2a \qquad .\dots\dots(3)$$

$$-m_2g - f = 0 \qquad \dots..(4)$$

¡¡¡Listooo que nos pregunten lo que quieran!!!

Solucion parte c) Nos preguntan el rango de valores permitidos para el modulo de F de manera que la masa m2 no resbale.

Hallamos F sumando 1 y 3

$$F - N = m_1 a$$

$$N = m_2 a$$

$$F = (m_1 + m_2)a$$

De aquí

$$\frac{F}{m_1 + m_2} = a \quad **$$

Por otro lado se debe cumplir que:

$$|f| \leq \mu_e |N| \qquad ****$$

De (4)

$$f = -m_2 g$$

De (3)

$$N = m_2 a$$

Entonces

$$|-m_2 g| \leq \mu_e |m_2 a|$$

Sustituimos en la anterior el valor de **

$$|-m_2 g| \leq \mu_e \left| m_2 \frac{F}{m_1 + m_2} \right|$$

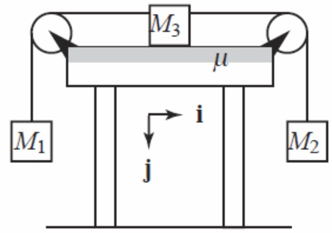
Despejamos F

$$|F| \geq \left| \frac{-m_2 g(m_1 + m_2)}{m_2 \mu_e} \right|$$

$$|F| \geq \left| \frac{-g(m_1 + m_2)}{\mu_e} \right|$$

$$F > \frac{g(m_1 + m_2)}{\mu_e}$$

Problema # 34



122. El sistema de la figura muestra tres bloques unidos a través de cuerdas ideales que pasan por poleas ideales. El bloque #3 se mueve sobre una superficie horizontal rugosa, siendo μ el coeficiente de fricción dinámico entre ellos. Los otros dos bloques cuelgan de las cuerdas y se mueven verticalmente. Llamaremos a a la componente x de la aceleración del bloque #3 de manera que $a_3 = a\,i$.

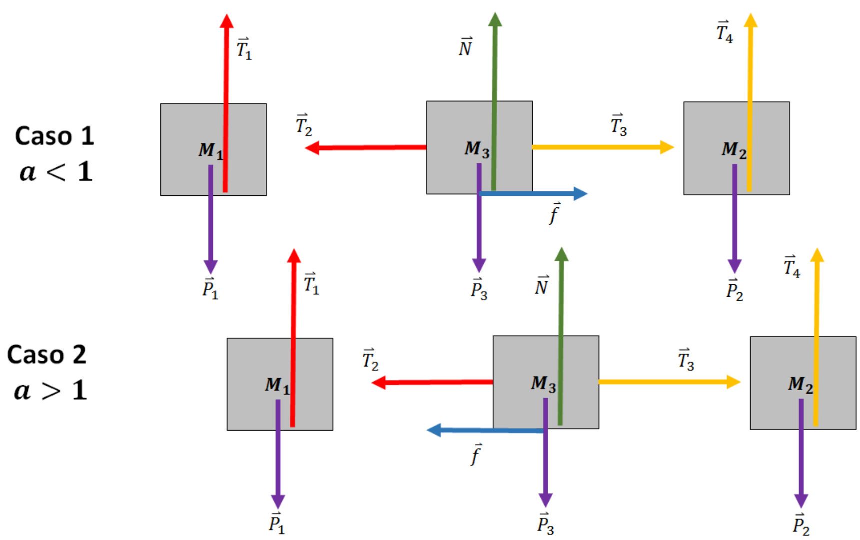
a. Usando las ecuaciones de Newton para los bloques que cuelgan determine el módulo de las tensiones en las cuerdas en función de a, g y de las masas de los bloques.

b. Utilizando los resultados de la pregunta anterior y las ecuaciones de Newton para el bloque #3 determine a para las siguientes dos situaciones: el bloque #3 moviéndose hacia la derecha (caso 1) y el bloque #3 moviéndose hacia la izquierda (caso 2).

c. Evalúe las respuestas obtenidas en la pregunta anterior cuando $M_1 = M_3 = 2$ kg, $M_2 = 6$ kg y $\mu = 1/2$. Diga para cada uno de los dos casos si el movimiento es acelerado o retardado.

d. Evalúe las respuestas obtenidas en la pregunta **b** cuando $M_1 = M_2 = M_3$. Diga si en alguno de los dos casos el bloque M_3 se puede detener en algún instante y cuál sería su movimiento ulterior si ello ocurriera.

Solucion parte a) Realizaremos un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo



Escribimos la segunda ley de Newton

$$\vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{T}_2 + \vec{T}_3 + \vec{P}_3 + \vec{N} + \vec{f} = m_3\vec{a}_3$$

$$\vec{T}_4 + \vec{P}_2 = m_2\vec{a}_2$$

Descomponemos todas las fuerzas según el sistema de referencia indicado en la figura.

Caso 1 el sistema va hacia la izquierda

$$T_1(-\hat{j}) + m_1 g(\hat{j}) = m_1 a_1(\hat{j})$$

$$T_2(-\hat{\imath}) + m_3 g(\hat{j}) + N(-\hat{j}) + T_3(\hat{\imath}) + f(\hat{\imath}) = m_3 a_3(\hat{\imath})$$

$$T_4(-\hat{j}) + m_2 g(\hat{j}) = m_2 a_2(\hat{j})$$

$$T_1 = T_2 = \mathcal{T}_1$$

$$T_3 = T_4 = \mathcal{T}_2$$

<u>Ligaduras</u>

Note que para el primer caso el sistema se mueve hacia la izquierda.

Asi,

$$a_2 = a_3 = a$$

$$-a_1 = a$$

Escribimos las ecuaciones escalares para el caso 1

$$-\mathcal{T}_1 + m_1 g = -m_1 a$$

$$-\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + f = m_3 a$$

$$m_3 g - N = 0$$

$$-\mathcal{T}_2 + m_2 g = m_2 a$$

Hallamos la tension 1

$$\mathcal{T}_1 = m_1(g + a)$$

Hallamos la tension 2

$$\mathcal{T}_2 = m_2(g - a)$$

Hallemos la aceleracion total del sistema

$$\cancel{-\mathcal{T}_1} + m_1 g = -m_1 a$$

$$\cancel{+\mathcal{T}_1} - \cancel{\mathcal{T}_2} - f = -m_3 a$$

$$\cancel{\mathcal{T}_2} - m_2 g = -m_2 a$$

$$(m_1 - m_2)g - f = -(m_1 + m_1 + m_3)a$$

$$f + (m_2 - m_1)g = (m_1 + m_1 + m_3)a$$

$$a = \frac{\mu m_3 g + (m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_1 + m_3)}$$

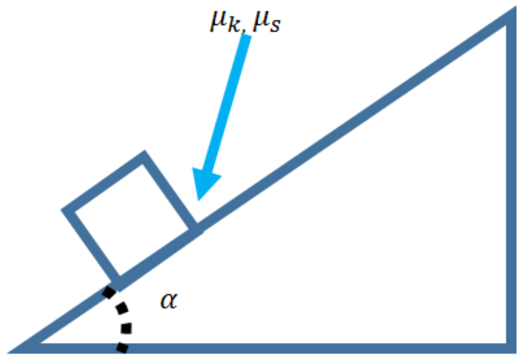
$$a = \left(\frac{\mu m_3 + (m_2 - m_1)}{(m_1 + m_1 + m_3)} \right) g$$

Caso 1 el sistema va hacia la derecha.

Solucion: Es practicamente lo mismo solo que la fuerza de friccion va "pal otro lado". Pero, ¿ Las ligaduras serán las mismas?

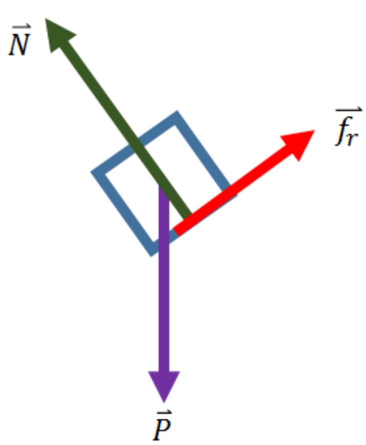
Problema# 35

Si un bloque desciente a velocidad constante por un plano inclinado con rose. ¿ que relacion se debe cumplir entre el ángulo de inclinacion α del plano y los coheficiente de rose estatico μ_s y dinamico $\mu_k$entre el bloque y la superficie.



a) $\tan\alpha < \mu_s$
b) $\mu_k < \tan\alpha < \mu_s$
c) $\tan\alpha = \mu_k$
d) $\tan\alpha > \mu_k$
e) Ninguna de las anteriores

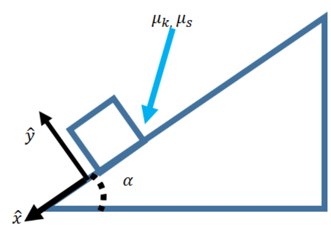
Solución. Realizamos un diagrama de cuerpo libre.



Escribimos la segunda ley de Newton

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f_r} = m\vec{a}$$

Fijamos un sistema de referencia y descomponemos todas las fuerzas.



$$N(\hat{y}) + mg\big(\sin\alpha\,(\hat{x}) + \cos\alpha\,(-\hat{y})\big) + f_r(-\hat{x}) = ma(\hat{x})$$

__Ligadura:__ El problema nos informa que el bloque desciende con velocidad constante. Luego

$$a = 0$$

Escribimos las ecuaciones escalares.

$$mg\sin\alpha - f_r = 0 \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$N - mg\cos\alpha = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Aspecto teórico: nos informan que existe movimiento relativo entre el bloque y la cuña, es decir estamos bajo un regimen cinético. Asi, se cumple que:

$$f_r = \mu_k N \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

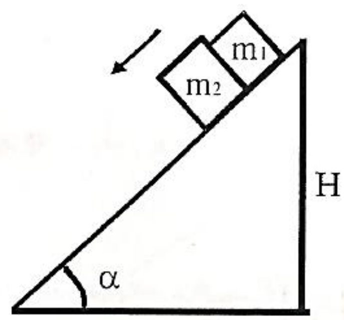
Entonces, de (1) despejamos f_r y de (2) despejamos N y sustituimos en (3)

$$mg\sin\alpha = \mu_k mg\cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \mu_k$$

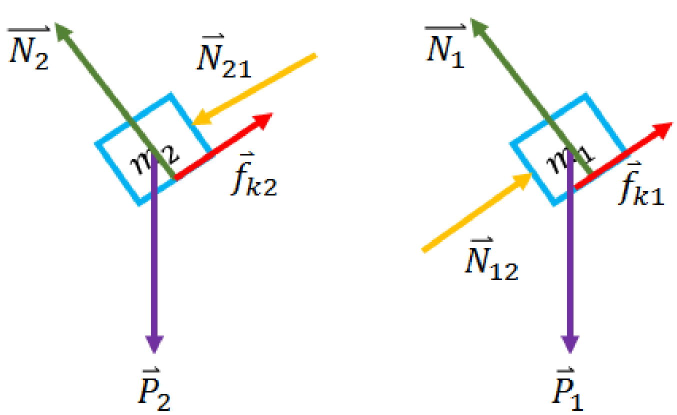
Problema # 36

11.- Dos bloques de masas m_1 y m_2 descienden por un plano inclinado (ángulo α) desde una altura inicial H. Los coeficientes de fricción dinámica de los bloques con el plano son μ_{k1} y μ_{k2} respectivamente, donde se cumple que $\mu_{k2} > \mu_{k1}$. Determinar: a) la fuerza de contacto entre los bloques (**5 ptos**), y b) la aceleración de los bloques (**5 ptos**).



Solucion

Realizamos un diagrama de cuerpo libre de los bloques por separado



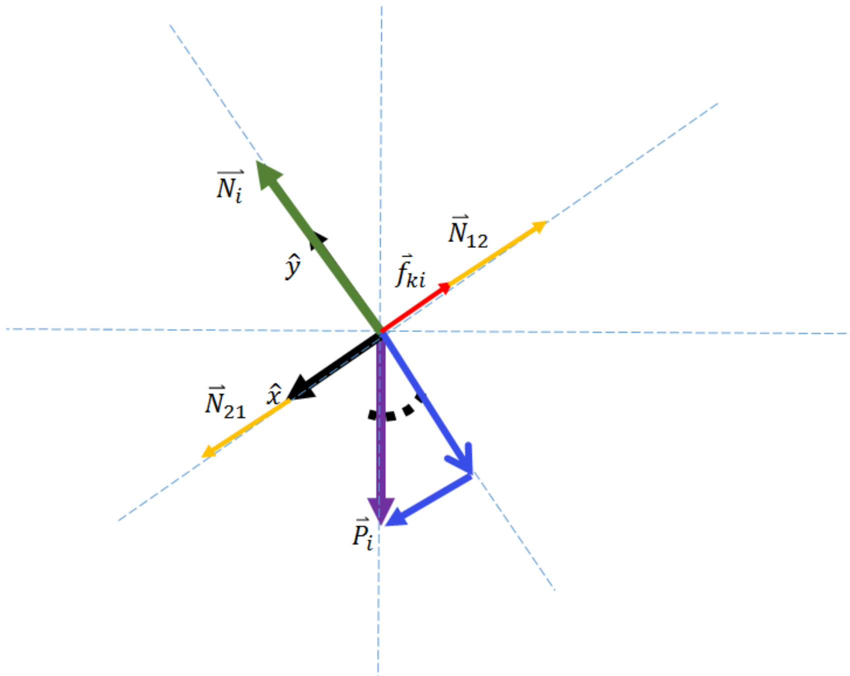
Escribimos las leyes de Newton

$$\vec{N}_2 + \vec{P}_2 + \vec{f}_{k1} + \vec{N}_{21} = m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{N}_1 + \vec{P}_1 + \vec{f}_{k2} + \vec{N}_{12} = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{N}_{21} = -\vec{N}_{12}$$

Escogemos un sistema de referencia y descomponemos todas las fuerzas.



$$N_2(\hat{y}) + m_2g\big(\sin\alpha\,(\hat{x}) + \cos\alpha\,(-\hat{y})\big) + f_{k2}(-\hat{x}) + N_{21}(\hat{x}) = m_2a_2(\hat{x})$$

$$N_1(\hat{y}) + m_1g\big(\sin\alpha\,(\hat{x}) + \cos\alpha\,(-\hat{y})\big) + f_{k1}(-\hat{x}) + N_{12}(-\hat{x}) = m_1a_1(\hat{x})$$

Ligaduras

$$a_2 = a_1 = a$$

$$N_{21} = N_{12} = N_c$$

Escribimos las ecuaciones escalares

$$N_2 - m_2g\cos\ \alpha = 0\ \dots\dots\dots..(1)$$

$$m_2g\sin\alpha - f_{k2} + N_c = m_2a\ \dots\dots\dots\dots.(2)$$

$$N_1 - m_1g\cos\alpha = 0\ \dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

$$m_1g\sin\alpha - f_{k1} - N_c = m_1a\ \dots\dots\dots\dots(4)$$

¡¡¡Listooo que nos pregunten lo que quieran!!!

De la ecuacion (1) y (3) podemos despejar las fuerzas que ejerce la cuña sobre los bloques

$$N_1 = m_1 g \cos\alpha \ldots\ldots(5)$$

$$N_2 = m_2 g \cos\alpha \ldots\ldots..(6)$$

Si sumamos (2) y (4) podemos hallar la aceleracion de los bloques

$$m_2 g \sin\alpha - f_{k2} + N_c = m_2 a$$

$$m_1 g \sin\alpha - f_{k1} - N_c = m_1 a$$

$$g \sin\alpha (m_1 + m_2) - (f_{k1} + f_{k2}) = (m_1 + m_2) a$$

Despejamos la aceleración

$$a = \frac{g \sin\alpha (m_1 + m_2) - (f_{k1} + f_{k2})}{(m_1 + m_2)} \ldots\ldots.(7)$$

Pero,

$$f_{k1} = \mu_{k1} * N_1$$

$$f_{k1} = \mu_{k1} m_1 \, g \cos\alpha \ldots\ldots.(8)$$

Y,

$$f_{k2} = \mu_{k2} * N_2$$

$$f_{k2} = \mu_{k2} m_2 \, g \cos\alpha \ldots\ldots.(9)$$

Sustituimos (8) y (9) en (7)

$$a = \frac{g \sin\alpha (m_1 + m_2) - (\mu_{k1} m_1 \, g \cos\alpha + \mu_{k2} m_2 \, g \cos\alpha)}{(m_1 + m_2)}$$

$$a = \frac{g \sin\alpha (m_1 + m_2) - g \cos\alpha \, (\mu_{k1} m_1 + \mu_{k2} m_2)}{(m_1 + m_2)} \ldots\ldots(10)$$

De la ecuacion (4) o (2) podemos despejar la fuerza de contacto entre los bloques

$$m_1 g \sin\alpha - f_{k1} - N_c = m_1 a$$

$$m_1 g \sin\alpha - f_{k1} - m_1 a = N_c \ldots\ldots(11)$$

Sustituimos (8) y (10) en (11)

$$m_1 g \sin\alpha - \mu_{k1} m_1\, g\cos\alpha - m_1\left(\frac{g\sin\alpha(m_1+m_2) - g\cos\alpha\,(\mu_{k1}m_1\ + \mu_{k2}m_2\,)}{(m_1+m_2)}\right) = N_c$$

Si no tenemos mas nada que hacer **¡¡¡SIMPLIFICAMOS!!!.** Como no tengo nada que hacer.

$$m_1 g \sin\alpha - \mu_{k1} m_1\, g\cos\alpha + \left(\frac{m_1 g\cos\alpha\,(\mu_{k1}m_1\ + \mu_{k2}m_2\,) - m_1 g\sin\alpha(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)}\right) = N_c$$

Mínimo común múltiplo (m_1+m_2),

$$\frac{(m_1+m_2)m_1 g\sin\alpha - (m_1+m_2)\mu_{k1}m_1\, g\cos\alpha + m_1 g\cos\alpha\,(\mu_{k1}m_1\ + \mu_{k2}m_2\,) - m_1 g\sin\alpha(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)} = N_c$$

Agrupamos los terminos que tienen $(m_1 + m_2)$,

$$\frac{(m_1 + m_2)[m_1 g \sin\alpha - \mu_{k1} m_1\, g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha]\; + m_1 g \cos\alpha\,(\mu_{k1} m_1\; + \mu_{k2} m_2\,)}{(m_1 + m_2)} = N_c$$

Simplificamos,

$$\frac{(m_1 + m_2)(-\mu_{k1} m_1\, g \cos\alpha) + m_1 g \cos\alpha\,(\mu_{k1} m_1\; + \mu_{k2} m_2\,)}{(m_1 + m_2)} = N_c$$

Distributiva,

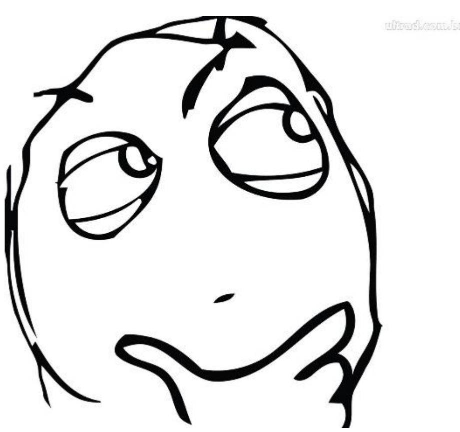
$$\frac{-(m_1)^2 \mu_{k1} g \cos\alpha - m_2 m_1 \mu_{k1} g \cos\alpha + (m_1)^2 \mu_{k1} g \cos\alpha + m_2 m_1 \mu_{k2} g \cos\alpha}{(m_1 + m_2)} = N_c$$

Simplificamos,

$$\frac{m_2 m_1 \mu_{k2} g \cos\alpha - m_2 m_1 \mu_{k1} g \cos\alpha}{(m_1 + m_2)} = N_c$$

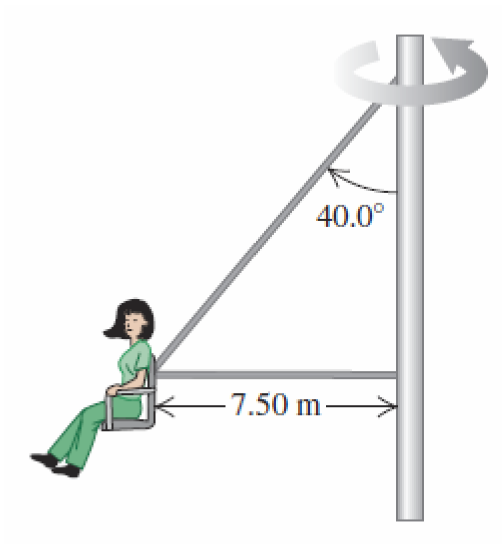
Agrupamos terminos semejantes,

$$\frac{m_2 m_1 g \cos\alpha\,(\mu_{k2} - \mu_{k1})}{(m_1 + m_2)} = N_c$$



Problema #37

Un asiento esta conectado a dos cables, como se indica en la figura. El asiento gira en un circulo horizontal a una tasa de 32.0 rpm (revoluciones por minuto). Si el asiento pesa 255 N y una persona 825 N sentada en él. Obtenga la tension de cada cable.



Solucion. Es claro que estamos en presencia del dinámica circular.

Nos dices que el asiento gira a una tasa de 32.0 rpm.

Cambiamos dichas a las del SI

$$32.0\frac{rev}{min}*\frac{2\pi}{1\,rev}*\frac{1\,min}{60\,s}=\frac{64\pi}{60\,s}=\frac{32\pi}{30\,s}=\frac{16\pi}{15\,s}$$

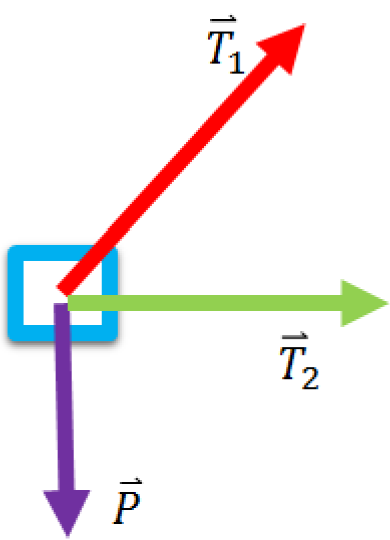
Es decir el asiento gira a

$$\omega=\frac{16\pi}{15}(s^{-1})$$

Lo segundo que nos dicen que es el asiento y la persona pensan 255 N y 825 N respectivamente. Es decir el peso total es de 1080 N

$$P=1080\text{ N}$$

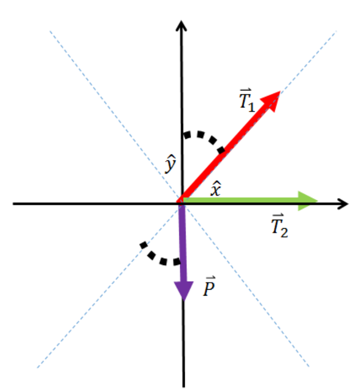
Realizamos un diagrama de cuerpo libre.



Escribimos la segunda ley de Newton

$$\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{P}=m\vec{a}$$

Escogemos un sistema de referencia “adecuado” para la situación fisica y descomponemos todas las fuerzas.



$$T_1(\cos\theta\,(\hat{y})+\sin\theta\,(\hat{x})+T_2(\hat{x})+P(-\hat{y})=m\vec{a}$$

Ligadura: observamos que $\omega = cte$ luego no hay aceleracion tangencial. Así solo hay aceleracion centripeta y la ecuacion vectorial de arriba nos queda.

$$T_1(\cos\theta\,(\hat{y}) + \sin\theta\,(\hat{x}) + T_2(\hat{x}) + P(-\hat{y}) = ma_c(\hat{x})$$

Escribimos las ecuaciones escalares.

$$T_1\cos\theta - P = 0\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$T_1\sin\theta + T_2 = mR\omega^2\ \ldots\ldots\ldots..(2)$$

De (1)

$$T_1 = \frac{P}{\cos\theta}\quad \ldots\ldots.(3)$$

Sustituyendo las cantidades númericas

$$T_1 = \frac{1080\ \mathrm{N}}{\cos 40°}$$

$$T_1 = 1409\ \mathrm{N}$$

Despejamos la tension 2 y sustituimos (3)

$$T_2 = mR\omega^2 - T_1\sin\theta$$

$$T_2 = mR\omega^2 - \frac{P}{\cos\theta}\quad\sin\theta$$

$$T_2 = mR\omega^2 - \ P\tan\theta$$

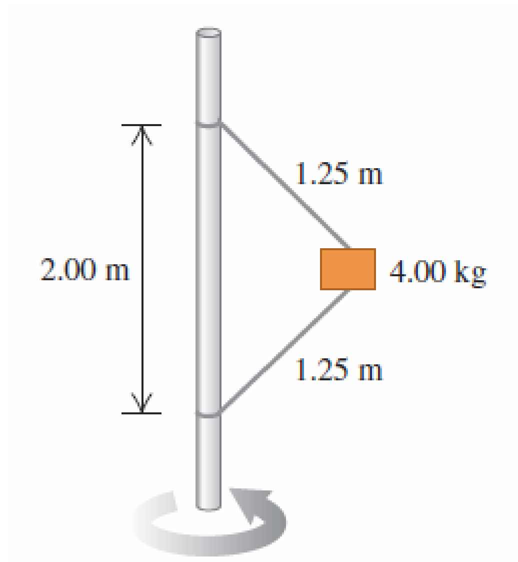
Sustituyendo las cantidades númericas

$$T_2 = 108\ kg * 7.50\ \mathrm{m} * \left(\frac{16\pi}{15\ \mathrm{s}}\right)^2 - 1080\ \mathrm{N} * \tan 40°$$

$$T_2 = 8189{,}6\ \mathrm{N}$$

Problema #38 Un bloque de 4.00 kg esta unido a una varilla vertical con dos cordones. Cuando el sistema gira en torno al eje de la varilla, los cordones se extienden como se indica en el diagrama, y la tension del cordon superior es de 80 N.

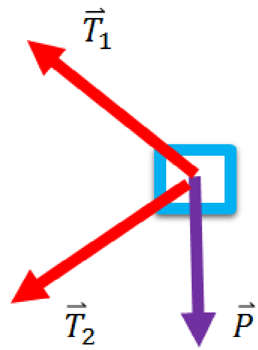
a) Calcule el modulo a la que esta sometida la tension inferior.
b) ¿Cuantas revoluciones por minuto da el sistema?
c) Calcule las revoluciones por minuto con las que el cordón inferior pierde toda tensión.



Solucion:

Es claro que estamos en presencia de un movimiento circular.

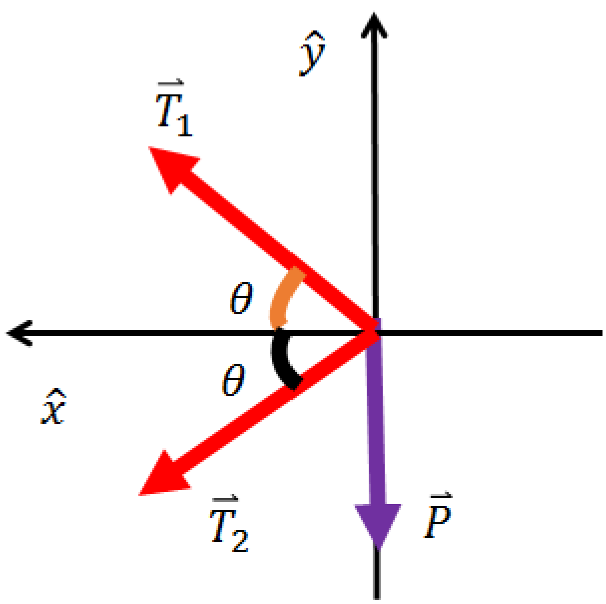
Realizamos el diagrama de cuerpo libre.



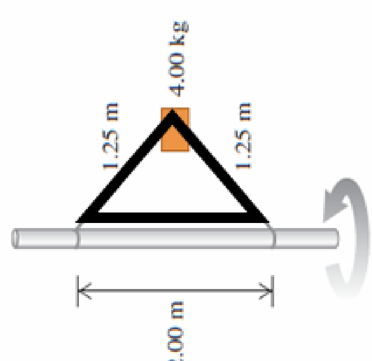
Escribimos la segunda ley de Newton.

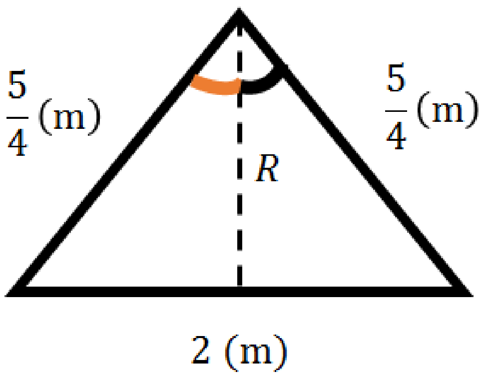
$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = m\vec{a}$$

Elegimos un sistema de referencia y descomponemos las fuerzas.



Antes de realizar la descomposicion es impresidible observar que los dos cables que ejercen tension y el eje describren un triangulo isoceles.

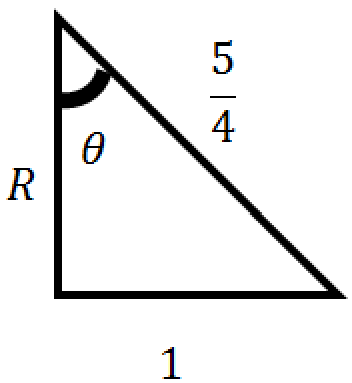




De aquí se desprenden dos cosas.

#1 la altura R del triangulo es el radio del circulo que describe el movimiento de la particula. Ese radio es el cateto opuesto de uno de los dos triangulos rectangulos que se forman. Podemos calcularlo mediante el teorema de pitagoras.

2# Los angulos en rojo y color “pupusito” valen lo mismo.



$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1^2 + R^2 \rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - (1)^2} = \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{16}{16}}$$

$$R = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$R = \frac{3}{4}(m)$$

Ahora si descomponemos todas las fuerzas,

$$T_1[\cos\theta\,(\hat{x}) + \sin\theta(\hat{y})] + T_2[\cos\theta(\hat{x}) + \sin\theta(-\hat{y}) + mg(-\hat{y}) = ma_c(\hat{x})$$

Es claro que si la particula esta sujeta por dos vigas, luego no hay aceleración en la dirección del vector unitario $(\hat{y})$. Con este vinculo. Procedemos armar las ecuaciones escalares.

$$T_1\cos\theta + T_2\cos\theta = mR\omega^2 \ldots\ldots\ldots(1)$$

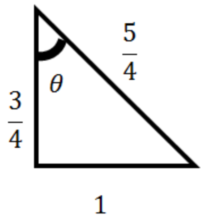
$$T_1\sin\theta - T_2\sin\theta - mg = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

De la ecuacion (2) podemos hallar el modulo de la tensión 2

$$T_1\sin\theta - T_2\sin\theta - mg = 0$$

$$T_2 = \frac{T_1\sin\theta - mg}{\sin\theta}$$

Sustituyendo las cantidades númericas.



$$T_2 = \frac{80\text{N}*\left(\frac{1}{\frac{5}{4}}\right)-4.00\ \text{kg}*10\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{\left(\frac{1}{\frac{5}{4}}\right)}$$

$$T_2 = \frac{80\ \text{N} * \left(\frac{4}{5}\right) - 40\text{N}}{\left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$T_2 = \frac{(64 - 40)\text{N}}{\left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$T_2 = \frac{24\ \text{N}}{\left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$T_2 = \left(\frac{96}{5}\right)\text{N}$$

$$T_2 = 19.2\ \text{N}$$

De la ecuacion (2)

$$T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta = mR\omega^2$$

Despejamos la velocidad angular.

$$\omega = \sqrt{\frac{T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta}{mR}}$$

Sustituyendo las cantidades númericas.

$$|\omega| = \sqrt{\frac{80\ \text{N} * \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right) + \left(\frac{96}{5}\right)\text{N} * \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right)}{4.00\ kg * \left(\frac{3}{4}\right) m}}$$

$$|\omega| = \sqrt{\frac{80\text{N} * \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{96}{5}\right)\text{N} * \left(\frac{3}{5}\right)}{3\ kg * m}}$$

$$|\omega| = \sqrt{\frac{48\text{N} + \left(\frac{288}{25}\right)\text{N}}{3\ kg * m}}$$

$$|\omega| = \sqrt{\frac{\left(\frac{1488}{25}\right)\text{kg} * \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{3\ kg * m}}$$

$$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{496}{25}\right)s^{-2}}$$

$$|\omega| = 4.45\ s^{-1}$$

Recordemos que

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Despejamos el periodo.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{4.45}s$$

$$T = 1.41\ s$$

Recordemos que por defición

$$T = \frac{Tiempo}{1\ vuelta}$$

Entonces

$$\frac{1\ vuelta}{(1.41)s} * \frac{60s}{1\ min}$$

$$42.5\left(\frac{rev}{\text{min}}\right)$$

Para responder la última pregunta basta con tomar la ecuación (1) y hacer cero el término.

$$T_2 \cos\theta = 0 \text{ (condición)}$$

$$T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta = mR\omega^2$$

$$T_1 \cos\theta = mR\omega^2$$

Despejamos ω

$$|\omega| = \sqrt{\frac{T_1 \cos\theta}{mR}}$$

$$|\omega| = \sqrt{\frac{80\text{ N} * \left(\frac{3}{5}\right)}{4.00\ kg * \left(\frac{3}{4}\right) m}}$$

$$|\omega| = \sqrt{\frac{48\ kg * \left(\frac{m}{s^2}\right)}{3\ kg * m}}$$

$$|\omega| = \sqrt{16 s^{-2}}$$

$$|\omega| = 4 s^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{4} s$$

$$T = \frac{\pi}{2} s$$

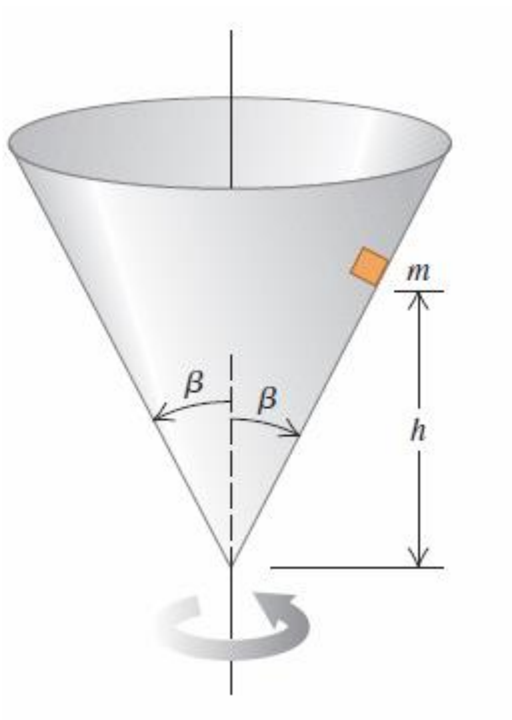
$$\frac{1\ vuelta}{\left(\frac{\pi}{2}\right) s} * \frac{60 s}{1\ min}$$

$$38.2\ \left(\frac{rev}{\text{min}}\right)$$

Nota importante: Este ejercicio me hizo perder 10 pts en mi segundo parcial de fisica 1 por no ver el triangulo isoceles que se crea con los cables y el eje.

Problema #39 Un pequeño bloque de masa m se coloca dentro de un cono invertido que gira sobre un eje vertical, de modo que la duracion de una revolucion del cono es T. Las paredes de cono forma un angulo β con la vertical. El coeficiente de friccion estatica entre el bloque y el cono es μ_s. Si el bloque debe mantenerse a una altura h sobre el vertice del cono.

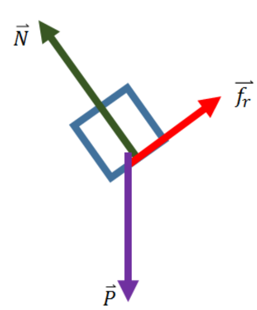
a) ¿Cuál es el nombre del chofer que maneja el cono? Hahahaha. Seriedad ps.
b) ¿Qué valores, maximo y minimo puede tomar T?



Solución.
Nos encontramos ante un caso de dinámica de movimiento circular. Ya que, si la masa m se mantiene a una altura h del vertice del cono describe perfectamente una circunferencia alrededor de este.

En este ejercicio se debe considerar dos casos. A saber, nos preguntamos ¿Qué sucede cuando el cono gira muy rápido? Respuesta: pues esperariamos que la fuerza de rose intentará sostener el cubo dentro del cono para que no salga disparado. Y ¿ si el cono gira lento?. Respuesta. De nuevo esperariamos que la fuerza de rose intentara sostener el cubo, pero esta vez para que no se resbale en el interior del cono.
Es decir, "el maximo" o el "minimo" dependerá de la fuerza de rose. **<u>ESE ES EL VINCULO</u>** de este ejercicio. El resto es como lo hemos venimos trabajando. Diagrama de cuerpo libre, leyes de newton, descomponemos las fuerzas, resolvemos las ecuaciones. Fin.

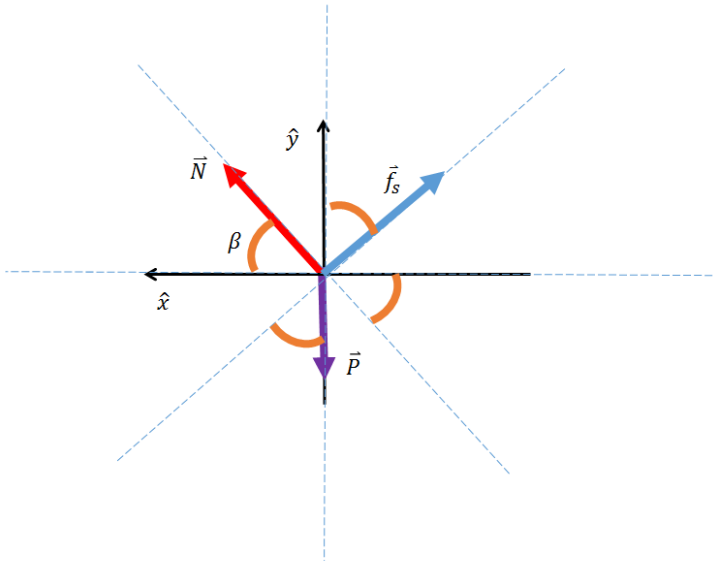
Diagrama de cuerpo libre Caso #1 El maximo: condicion; la fuerza de rose apunta hacia arriba para evitar que el cubo se salga del cono.



Escribimos la segunda ley de Newton.

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f_s} = m\vec{a}$$

Elegimos un sistema de referencia y descomponemos todas las fuerzas.



Espero ya no halla problemas con la elección del sistema de refencia. En este caso particular, el sistema tiene una componente horizontal (en el sentido de la aceleracion centripeta) y una componente vertical.

Por otro lado, si el cono realiza una revolucion en un tiempo T. Quiere decir, que su velocidad angular es constante. Luego no hay aceleracion tangencial.

$$N[\cos\beta\,(\hat{x}) + \sin\beta\,(\hat{y})] + mg(-\hat{y}) + f_s[\cos\beta\,(\hat{y}) + \sin\beta\,(-\hat{x}) = ma(\hat{x})$$

Ecuaciones escalares,

$$N\cos\beta - f_s\sin\beta = mR\omega^2 \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$N\sin\beta - mg + f_s\cos\beta = 0 \dots\dots\dots\dots (2)$$

De la ecuacion (2) despejamos la Normal,

$$N\sin\beta + f_s\cos\beta = mg \dots\dots\dots.. (3)$$

La fuerza de rose, un instante de tiempo antes de resbalar se cumple que,

$$f_s = \mu_s N \dots\dots\dots.. (4)$$

Sustituyendo (4) en (3),

$$N\sin\beta + \mu_s N\cos\beta = mg$$

Sacamos factor común N,

$$N(\sin\beta + \mu_s\cos\beta) = mg$$

De donde obtenemos que N,

$$N = \frac{mg}{\sin\beta + \mu_s \cos\beta} \dots \dots \dots . (5)$$

Luego, sustituimos (4) en (1),

$$N \cos\beta - \mu_s N \sin\beta = mR\omega^2$$

Sacamos factor comun N,

$$N(\cos\beta - \mu_s \sin\beta) = mR\omega^2 \dots \dots \dots . . (6)$$

Sustituimos (5) en (6),

$$\frac{mg}{\sin\beta + \mu_s \cos\beta}(\cos\beta - \mu_s \sin\beta) = mR\omega^2$$

Simplificamos y despejamos la velocidad angular,

$$\frac{g(\cos\beta - \mu_s \sin\beta)}{\sin\beta + \mu_s \cos\beta} = R\omega^2$$

$$\frac{g(\cos\beta - \mu_s \sin\beta)}{R(\sin\beta + \mu_s \cos\beta)} = \omega^2 \dots \dots . . (7)$$

Pero,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \dots \dots \dots \dots . (8)$$

Sustituimos (8) en (7)

$$\frac{g(\cos\beta - \mu_s \sin\beta)}{R(\sin\beta + \mu_s \cos\beta)} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Despejamos T,

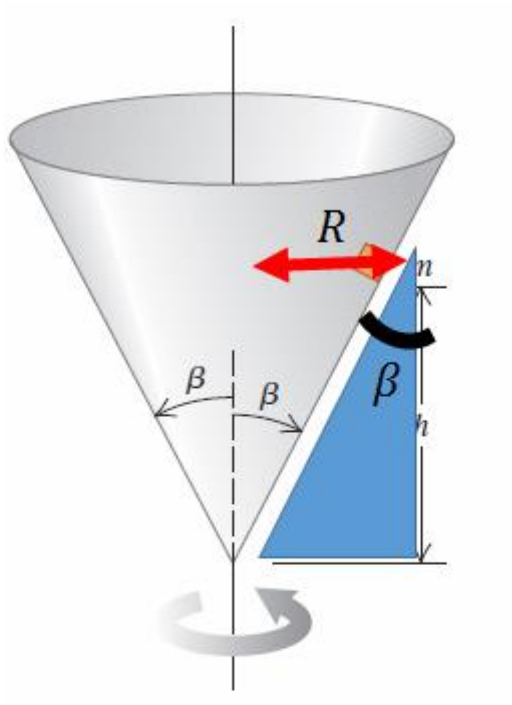
$$\frac{g(\cos\beta - \mu_s \sin\beta)}{R(\sin\beta + \mu_s \cos\beta)} = \frac{(2\pi)^2}{T^2}$$

$$\frac{g(\cos\beta - \mu_s \sin\beta)}{(2\pi)^2 R(\sin\beta + \mu_s \cos\beta)} = \frac{1}{T^2}$$

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R(\sin\beta + \mu_s \cos\beta)}{g(\cos\beta - \mu_s \sin\beta)}$$

$$|T| = 2\pi\sqrt{\frac{R(\sin\beta + \mu_s \cos\beta)}{g(\cos\beta - \mu_s \sin\beta)}} \dots\dots\dots (9)$$

No conocemos R. En realidad si. Veamos fijamente a los ojos el cono.



Y entonces nos damos cuenta que:

$$R = h\tan\beta \dots\dots. (10)$$

Sustituimos (10) en (9)

$$|T| = 2\pi\sqrt{\frac{h\tan\beta\,(\sin\beta + \mu_s \cos\beta)}{g(\cos\beta - \mu_s \sin\beta)}}$$

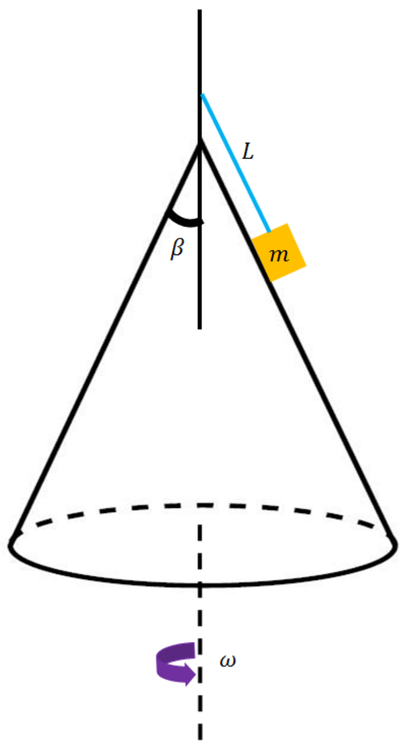
$$|T|_{max} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{h\tan\beta}{g}\right)\left(\frac{\sin\beta + \mu_s\cos\beta}{\cos\beta - \mu_s\sin\beta}\right)}$$

Dejamos el caso dos como tarea.

$$|T|_{min} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{h\tan\beta}{g}\right)\left(\frac{\sin\beta - \mu_s\cos\beta}{\cos\beta + \mu_s\sin\beta}\right)}$$

Problema #40 El cono volteado: Un pequeño bloque de masa m se coloca en la cubierta de un cono sujetado por una cuerda de largo L con masa despreciable e ideal que gira sobre un eje vertical con una velocidad angular ω. Las paredes de cono forma un angulo β con la vertical. No existe friccion entre el bloque y la superficie del cono.

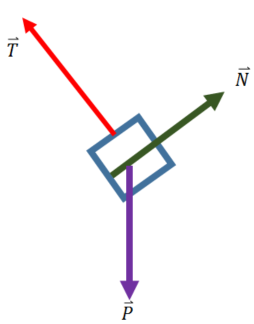
a) Calcule el modulo de la tensión ejercida por la cuerda. Exprese su resultado en funcion del angulo β, el largo de la cuerda L, la velocidad angular ω y la masa del cubo m.
b) Calcule el modulo de la fuerza que ejerce la superficie del cono sobre el pequeño bloque. Exprese su resultado en funcion del angulo β, el largo de la cuerda L, la velocidad angular ω y la masa del cubo m.



Solución.

Un ejercicio muy parecido al anterior. Lo incluyo en esta sección porque el simple hecho de resolver las ecuaciones escalares para hallar los modulos preguntados.

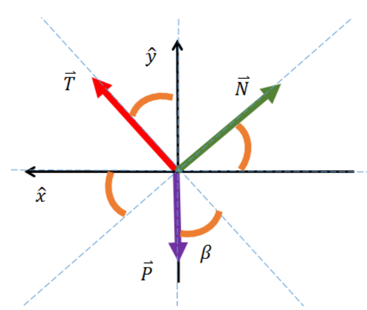
Nos encontramos ante un caso de dinamica de movimiento circular. Ya que, la masa m se mantiene siempre a una distancia del vertice del cono debido a la cuerda que lo sujeta y no permite que este resbale.
El resto es como lo hemos venimos trabajando. Diagrama de cuerpo libre, leyes de newton, descomponemos las fuerzas, resolvemos las ecuaciones. Fin. De hecho, en este punto uno comienza aburrirse un poco del jueguito porque se convierte en algo mecánico. Lo interesante es poder imaginar la situación fisica para obtener información del sistema que te permita establecer los vinculos o ligaduras.



Escribimos la segunda ley de newton

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Elegimos un sistema de referencia y descomponemos todas las fuerzas.



$$T[\cos\beta\,(\hat{y}) + \sin\beta\,(\hat{x})] + N[\cos\beta(-\hat{x}) + \sin\beta\,(\hat{y})] + mg(-\hat{y}) = ma_c(\hat{x})$$

Escribimos las ecuaciones escalares.

$$T\cos\beta + N\sin\beta - mg = 0 \dots\dots (1)$$

$$T\sin\beta - N\cos\beta = mR\omega^2 \dots\dots (2)$$

Buscamos el modulo de la tensión.

Multiplicamos (1) por $\cos\beta$ y (2) por $\sin\beta$. Luego las sumamos.

$$T\cos^2\beta + N\sin\beta\cos\beta - mg\cos\beta = 0$$

$$T\sin^2\beta - N\cos\beta\sin\beta = mR\omega^2\sin\beta$$

$$T(\sin^2\beta + \cos^2\beta) - mg\cos\beta = mR\omega^2\sin\beta$$

$$T = mR\omega^2\sin\beta + mg\cos\beta$$

$$T = m(R\omega^2\sin\beta + g\cos\beta) \dots\dots\dots (3)$$

Y de nuevo desconocemos R. Pero viendo fijamente a los ojos el cono

$$R = L\sin\beta \dots\dots (4)$$

Sustituyendo (4) en (3)

$$T = m(L\sin^2\beta\,\omega^2 + g\cos\beta)$$

Buscamos el modulo de la fuerza normal.

Multiplicamos (1) por $\sin\beta$ y (2) por $-\cos\beta$ y sumamos las ecuaciones.

$$T\cos\ \beta\sin\beta + N\sin^2\beta\cos\beta - mg\sin\beta = 0$$

$$-T\sin\beta\cos\beta + N\cos^2\beta\sin\beta = -mR\omega^2\cos\beta$$

$$N(\sin^2\beta + \cos^2\beta) - mg\sin\beta = -mR\omega^2\cos\beta$$

$$N = -mR\omega^2\cos\beta + mg\sin\beta$$

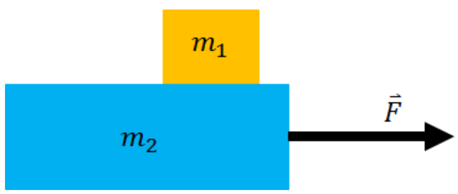
$$N = m(g\sin\beta - R\omega^2\cos\beta) \dots\dots (5)$$

Sustituimos (4) en (5)

$$N = m(g\sin\beta - L\sin\beta\cos\beta\,\omega^2)$$

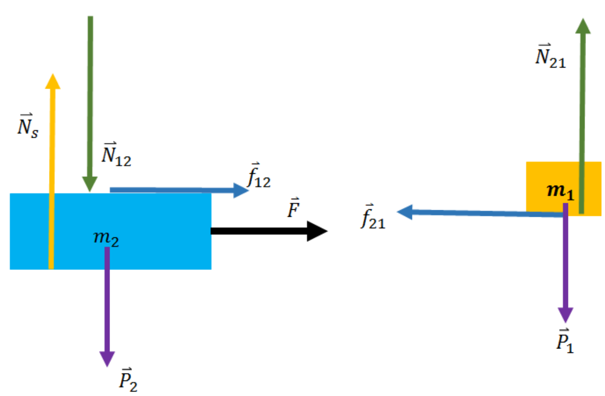
Problema #41. Hablando de ejercicios diferentes. En la figura $m_1$se encuentra encima del bloque m_2. Entre ellos existe rose con los siguientes coeficientes de friccion estatico $\mu_s = 0.5$ y dinámico $\mu_k = 0.25$. Entre el bloque m_2 y el piso no hay fricción. Sobre el bloque m_2 se aplica una fuerza hacia la derecha cuyo modulo es $|\vec{F}| = Ct$, donde t es el tiempo en segundo y $C = 10\left(\frac{\text{N}}{s}\right)$, una constante. El sistema parte del reposo en el instante $t = 0s$ y los valores de las masas $m_1 = 4kg$ y $m_2 = 20\ kg$

a) Dibuje claramente el diagrama de cuerpo libre para cada una de las masas en cualquier instante de tiempo. Escriba las ecuaciones de movimiento para cada una de ellas.
b) Calcule el tiempo que le tomará transcurrir para que el bloque $m_1$comience a deslizar sobre el bloque m_2.
c) Determine el valor de las aceleraciones para cada una de las masas cuando los bloques comienzan a deslizar.



Solución. Parte a)

Realizamos un diagrama de cuerpo libre para cada una de las masas.



$\vec{N}_s = \ fuerza\ que\ ejerce\ la\ superficia\ sobre\ m_2$

$\vec{P}_2 = el\ peso\ de\ m_2$

$\vec{f}_{12} = fuerza\ de\ rose\ que\ m_1\ realiza\ sobre\ m_2$

$\vec{N}_{12} = fuerza\ que\ normal\ que\ ejerce\ m_1\ sobre\ m_2$

$\vec{F} = fuerza\ externa\ sobre\ m_2$

$\vec{f}_{21} = fuerza\ de\ rose\ que\ m_2\ realiza\ sobre\ m_1$

$\vec{N}_{21} = fuerza\ que\ normal\ que\ ejerce\ m_2\ sobre\ m_1$

$\vec{P}_1 = el\ peso\ de\ m_1$

Escribimos las leyes de Newton. Primera y Segunda Ley.

$$\vec{N}_s + \vec{N}_{12} + \vec{f}_{12} + \vec{P}_2 + \vec{F} = m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{N}_{21} + \vec{P}_1 + \vec{f}_{21} = m_1\vec{a}_1$$

$$-\vec{N}_{12} = \vec{N}_{21}$$

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

Escogemos un sistema de referencia y descomponemos todas las fuerzas.

$$N_s(\hat{y}) + N_{21}(-\hat{y}) + f_{21}(-\hat{x}) + m_2g(-\hat{y}) + F(\hat{x}) = m_2a_2(\hat{x})$$

$$N_{21}(\hat{y}) + m_1g(-\hat{y}) + f_{21}(\hat{x}) = m_1a_1(\hat{x})$$

Ecuaciones escalares.

$$N_s - N_{21} - m_2g = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$-f_{21} + Ct = m_2a_2 \ldots\ldots(2)$$

$$N_{21} - m_1g = 0 \ldots\ldots(3)$$

$$f_{21} = m_1a_1 \ldots\ldots(4)$$

Parte b)

Nos piden calcular el instante de tiempo para el cual las masas comienzan a deslizar entre si. Esto implica que antes de ese tiempo no deslizaban. Es decir, estaban bajo un regimen estático. Además, ambas cajas tenian las misma aceleración. Asi, tenemos las siguientes ligaduras.

#1) para algun tiempo t_0 se cumple que $a_1 = a_2 = a$

#2) justo un instante de tiempo antes de que deslizaran se cumple que $f_s = \mu_s N$

Tomamos las ecuaciones (2) y (3) y las sumamos.

$$-f_{21} + Ct = m_2a$$

$$f_{21} = m_1a$$

$$\overline{}$$

$$Ct = (m_1 + m_2)a \ldots\ldots(5)$$

De la ecuación (4) sabemos que

$$a = \left(\frac{f_{21}}{m_1}\right) \ldots \ldots . (6)$$

Sustituimos (6) en (5)

$$Ct = (m_1 + m_2)\frac{f_{21}}{m_1} \ldots \ldots (7)$$

Pero,

$$f_{21} = \mu_s N_{21} \ldots \ldots (8)$$

Sustituimos (8) en (7)

$$Ct = (m_1 + m_2)\frac{\mu_s N_{21}}{m_1} \ldots \ldots (9)$$

Y de la ecuacion (3) tenemos

$$N_{21} = m_1 g$$

Sustituimos en (9)

$$Ct = (m_1 + m_2)\frac{\mu_s m_1 g}{m_1}$$

Simplificamos y despejamos t

$$Ct = (m_1 + m_2)\mu_s g$$

$$t = \frac{(m_1 + m_2)\mu_s g}{C}$$

Sustitumos las cantidades númericas.

$$t = \frac{(4kg + 20kg) * 0.5 * 10\ \left(\frac{m}{s^2}\right)}{10\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}\right)}$$

$$t = \frac{(24kg) * 5\left(\frac{m}{s^2}\right)}{10\,\frac{\left(kg * \frac{m}{s^2}\right)}{s}}$$

$$t = \frac{120}{10}(s)$$

$$t = 12(s)$$

Parte c) Es claro que las ecuaciones de movimiento son las mismas

$$N_s - N_{21} - m_2 g = 0 \ldots \ldots (1)$$

$$-f_{21} + Ct = m_2 a_2 \ldots \ldots (2)$$

$$N_{21} - m_1 g = 0 \ldots \ldots (3)$$

$$f_{21} = m_1 a_1 \ldots \ldots (4)$$

Solo que ahora sabemos que $t = 12s$

Y que estamos bajo un regimen dinámico, pues ya hay movimiento. Se cumple que

$$f_{21} = \mu_k N_{21} \ldots \ldots (10)$$

De la ecuacion (2) obtenemos la aceleracion del bloque de masa m_2

$$-f_{21} + Ct = m_2 a_2$$

Despejamos a_2

$$a_2 = \frac{Ct - f_{21}}{m_2} \ldots \ldots (11)$$

Sustituimos (10) en (11)

$$a_2 = \frac{Ct - \mu_k N_{21}}{m_2} \ldots \ldots (12)$$

Sustituyendo (3) en (12)

$$a_2 = \frac{Ct - \mu_k m_1 g}{m_2}$$

Sustituimos las cantidades numéricas.

$$a_2 = \frac{10\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}\right) * 12\,(s) - 0.25 * 4(kg) * 10\left(\frac{m}{s^2}\right)}{20\,(kg)}$$

$$a_2 = \frac{120 \text{ N} - 10 \text{ N}}{20(kg)}$$

$$a_2 = \frac{110 \text{ N}}{20 \, kg}$$

$$a_2 = \frac{11}{2}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Veamos que pasa con a_1

De la ecuación (4)

$$f_{21} = m_1 a_1$$

$$a_1 = \frac{f_{21}}{m_1}$$

Sustituyendo el valor de la fuerza de rose que ya conocemos

$$a_1 = \frac{\mu_k m_1 g}{m_1}$$

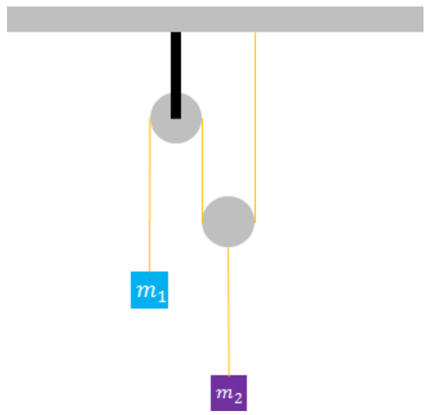
$$a_1 = \mu_k g$$

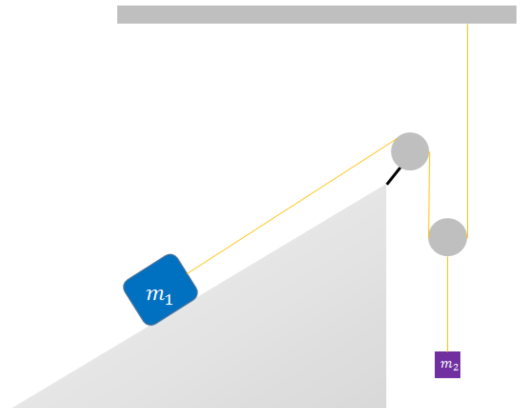
Sustituimos las cantidades numericas

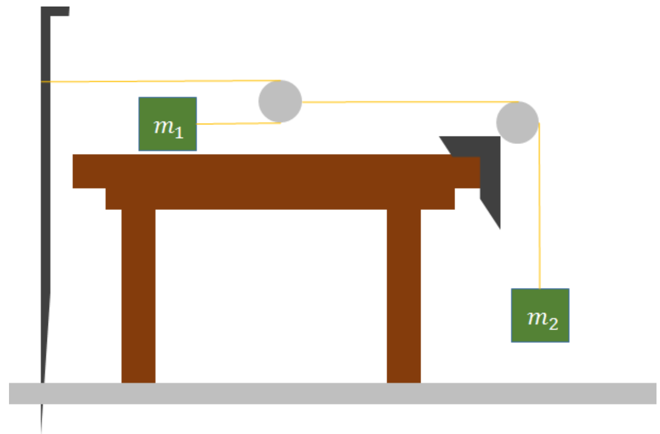
$$a_1 = 0.25 * 10\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$a_1 = \frac{5}{2}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Problema #42. Hablando de cosas que puedan ser útiles y que ameritan ser practicadas. Las ligaduras entre distintos bloques. El ejercicio es el siguiente. Para cada uno de los distintos sistemas mostrados hallar la ligadura entre las aceleraciones de los objetos. Yo hago el primero y ustedes el resto ☺.



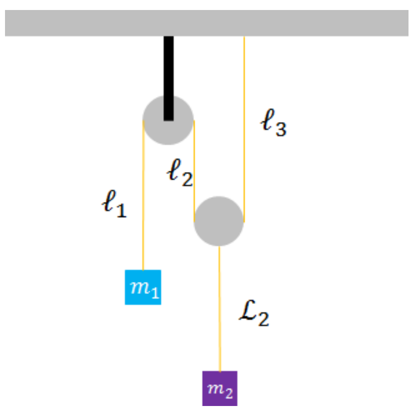




Solucion #1

Llamamos $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ a las dos cuerdas que aparecen en el sistema.

Donde $\mathcal{L}_1 = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ y $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2$ como se muestra en la figura.



Luego escribimos los segmentos de cuerdas en distancias que varian en el tiempo y distancias constantes.

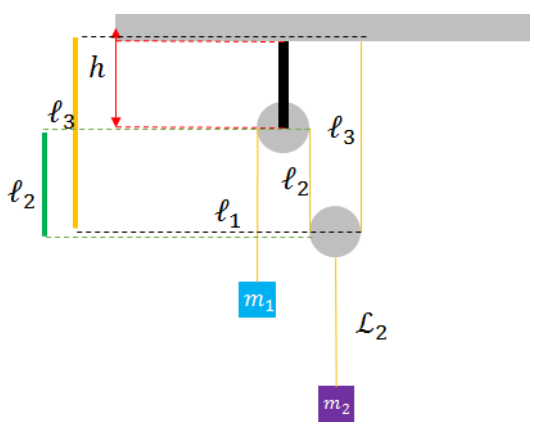
Por ejemplo. El segmento de cuerda ℓ_1 varia en el tiempo de acuerdo a la posición de la masa m_1

Asi,

$$\ell_1 = x_1$$

Es fácil ver, que el segmento de cuerda ℓ_3 se alarga o se acorta según el movimiento de la pocision de la polea móvil.

$$\ell_3 = x_p$$



Por último, note que hay una polea fija al techo por medio de una barra de longitud h constante. Si al segmente de cuerda ℓ_3 le restamos la longitud de la barra h , nos da como resultado la longitud del segmento de cuerda ℓ_2. Ver figura.

Asi,

$$\boldsymbol{\ell_2 = \ell_3 - h}$$

Pero $\ell_3 = x_p$, Entonces

$$\ell_2 = x_p - h$$

De esta manera obtenemos la siguiente ecuación.

$$\mathcal{L}_1 = x_1 + (x_p - h) + x_p + 2s$$

Con 2s constante que representa el segmento de cuerda enrollado en cada una de las poleas.

Simplificando,

$$\mathcal{L}_1 = x_1 + 2x_p + 2s - h$$

Derivamos dos veces respecto al tiempo,

$$0 = \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_p \ldots \ldots (1)$$

Es fácil tambien ver que,

$$\mathcal{L}_2 = x_2 - x_p$$

Derivamos dos veces respecto al tiempo,

$$0 = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_p$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_p \ldots \ldots (2)$$

La ecuación (2) nos esta diciendo. ¡" La aceleracion de la masa m_2 es igual a la aceleración de la polea movil"! . Es claro ¿no? Ya que $\mathcal{L}_2$ es un segmento de cuerda constante.

Sustituyendo (2) en (1)

$$0 = \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2$$

Concluimos que la aceleracion del bloque m_2 es la mitad del bloque m_1. Y el signo menos nos indica que si uno sube el otro baja.

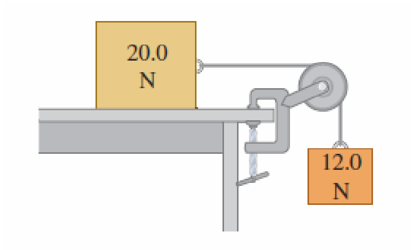
$$\vec{a}_1 = -2\vec{a}_2$$

La relación en **<u>modulos</u>** (la que vamos a sustituir en las ecuaciones escalares) es:

$$\frac{a_1}{2} = a_2$$

Problema #43 Dos bloques estan conectados por un cordon muy ligero que pasa por una polea sin masa y sin friccion. Al viajar a rapidez contante el bloque de 20 N se mueve 75 cm a la derecha y el bloque de 12 N se mueve 75 cm hacia abajo. Durante este proceso, cuanto trabajo efectua.

a) Sobre el bloque de 12 N la gravedad y la tensión.
b) Sobre el bloque de 20 N la gravedad, la tension, la friccion, la fuerza normal.
c) Obtenga el trabajo total efectuado sobre cada bloque.

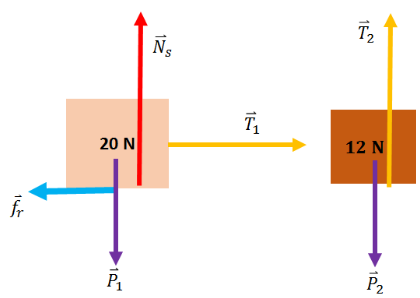


Solución.

Es claro que estamos tratando con fuerzas constantes. Por ende utilizaremos la definicion de trabajo para fuerzas constantes sobre desplazamientos en linea recta.

$$\vec{F}.\vec{s} = F.s.\cos\theta$$

Realizamos un diagrama de cuerpo libre sobre cada una de las masas.



Debemos hallar el modulo de la fuerza de tensión.

Para ello aplicamos la segunda ley de newton.

$$N(\hat{y}) + m_1 g(-\hat{y}) + T(\hat{x}) - f(-\hat{x}) = 0$$

$$T(\hat{y}) + m_2 g(-\hat{y}) = 0$$

$$N = m_1 g$$

$$T = f$$

$$T = m_2 g$$

$$T = f = 12 \text{ N}$$

Calculamos los trabajos para cada unas de las fuerzas sobre el bloque de 20 N

$$W_{\vec{P}} = m_1 g * 75\ cm * \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$W_{\vec{N}} = m_1 g * 75\ cm * \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$W_{\vec{f}} = 12 \text{ N} * 75\ cm * \frac{1\ m}{100\ cm}\cos(\pi) = -9\ J$$

$$W_{\vec{T}} = 12 \text{ N} * 75\ cm * \frac{1\ m}{100\ cm}\cos(0) = 9\ J$$

$$W_{total} = 0$$

Calculamos los trabajos para cada unas de las fuerzas sobre el bloque de 12 N

$$W_{\vec{T}} = 12\text{ N} * 75\ cm * \frac{1\ m}{100\ cm}\cos(\pi) = -9\ J$$

$$W_{\vec{P}} = 12\text{ N} * 75\ cm * \frac{1\ m}{100\ cm}\cos(0) = 9\ J$$

$$W_{total} = 0$$

Problema # 44

131. Sobre una partícula que se mueve en el eje x actúa la fuerza $\boldsymbol{F} = (3x^2 - 1)\,\hat{u}_x$ donde x es la posición de la partícula y todas las unidades pertenecen al SI. El trabajo, en Joules, realizado por esta fuerza cuando la partícula se mueve desde el origen al punto $x = 2$ es

A) 6

B) 22

C) 8

D) 24

E) 11

Solucion.

Por definición,

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr}$$

Entonces,

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_0^2 (3x^2 - 1)\hat{\imath}.\,(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{\jmath})$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_0^2 (3x^2 - 1)dx$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = x^3 - x|_0^2$$

Evaluamos,

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 2^3 - 2 - (0^3 - 0)$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 6$$

Problema #45

132. La figura muestra una partícula que se mueve sobre un riel de radio R y centro c. Las líneas $\overline{ca}$ y $\overline{cb}$ son perpendiculares. Sobre la partícula actúa una fuerza $\boldsymbol{F}$ constante de módulo F y paralela a $\overline{ca}$. El trabajo realizado por $\boldsymbol{F}$ cuando la partícula va de a hasta b es

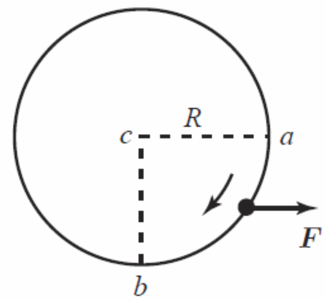
A) $-2RF$

B) $-RF$

C) 0

D) $-\sqrt{2}RF$

E) $-\pi RF/4$



Solución.

Por definición

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_A^C \vec{F}\cdot\vec{dr} + \int_C^B \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_A^B F\hat{\imath}\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}) = \int_A^C F\hat{\imath}\cdot dx\hat{\imath} + \int_C^B F\hat{\imath}\cdot dy\hat{\jmath}$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_A^C F dx$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = F\int_A^C dx$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = F(c-a)$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = -FR$$

Problema #46

133. Sobre una partícula que se mueve en el plano xy actúa la fuerza $\boldsymbol{F} = 3xy\,\boldsymbol{i}$ donde (x, y) son las coordenadas de la partícula (todas las unidades son del SI). El trabajo realizado por esta fuerza a lo largo de la recta que va del origen al punto A de coordenadas (2,4) es

A) 16.

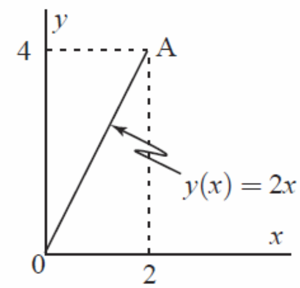
B) 24

C) 72.

D) 48.

E) ninguno de los anteriores.

Ayuda: Halle $\boldsymbol{F}$ en función de x para los puntos sobre la curva.



Solución

Por definición,

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_{0}^{A} 3xy \cdot [dx(\hat{\imath}) + dy(\hat{\jmath})]$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_{0}^{A} 3xy(\hat{\imath}) \cdot [dx(\hat{\imath}) + dy(\hat{\jmath})]$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_{0}^{A} 3xydx$$

Tenemos la ayuda de que,

$$y(x) = 2x$$

Asi,

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_{0}^{A} 3x(2x)dx$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_{0}^{2} 6x^2dx$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 3x^3 = 2(2)^3 = 16$$

Problema #47

134. Una partícula, en el origen y de masa 1 kg, parte del reposo mientras está sometida únicamente a la fuerza $\boldsymbol{F} = F(x)\,\hat{\boldsymbol{u}}_x$, donde $F(x)$ es dada en la gráfica. La rapidez de la partícula en $x = 2$ m, en m/s, es

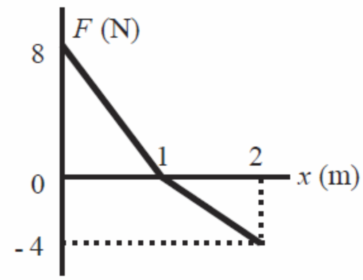
A) 4

B) $2\sqrt{3}$

C) 2

D) 0

E) $2\sqrt{2}$



Solucion: Usaremos el teorema del trabajo y energia.

$$\vec{F}\cdot\vec{s} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \;\ldots\ldots..(1)$$

Note que la fuerza F es una función a trozos. Usaremos la ecuación punto pendiente para hallar las expresiones de las rectas.

$$F(x) = \begin{cases} -8x+8 & \forall \quad 0 \le x \le 1 \\ -4x+4 & \forall \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Por definición,

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{d}r$$

Asi,

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_0^1 (-8x+8)dx + \int_1^2 (-4x+4)dx$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = -4x^2+8x\Big|_0^1 - 2x^2+4x\Big|_1^2$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = -4(1^2)+8(1) - \left(-4(0)^2+8(0)\right) - 2(2^2)+4(2) - (-2(1)^2+4(1))$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = -4+8-8+8-2 = 2$$

Sustituimos en (1),

$$2 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Como parte del reposo, su velocidad inicial es cero,

$$2 = \frac{1}{2} m v_f^2$$

Despejamos la velocidad final,

$$v_f^2 = \frac{4}{m}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{4}{m}}$$

Sustituyendo,

$$v_f = \sqrt{4} = 2$$

Problema #48

135. Una partícula de masa 2 kg inicialmente en reposo siente una fuerza neta dada por $\boldsymbol{F} = 6t\, \hat{\boldsymbol{u}}_x$ donde t es el tiempo y todas las unidades pertenecen al Sistema Internacional. El trabajo, en Joules, realizado por esta fuerza entre $t = 0$ y $t = 2$ seg es

A) 12

B) 9

C) 6

D) 24

E) 36

Solución. La clave de este ejercicio es, como lo dice Gloria Buen Día, darse cuenta que te estan dando la fuerza neta.

Por definición,

$$W_{\vec{F}}^{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

$$W_{\vec{F}}^{A \to B} = \int_0^{2s} 6t(\hat{u}_x) \cdot \vec{dr} \ldots \ldots .. (1)$$

Y entonces nos conseguimos con un betica. Estamos integrando con respecto a un diferencial de posición, evaluandolo en limites de tiempo.

Es claro que esto, aquí en la tierra, no se puede hacer, al menos por ahora, quizas en mate VII si y no lo sabemos.

Sin embargo, nos acordamos que:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

De aquí,

$$\vec{v}(t)dt = d\vec{r} \dots \dots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_{0}^{2s} 6t(\hat{u}_x) \cdot \vec{v}(t)dt \dots \dots (3)$$

Y hemos cambiado un problema grande por un problema menos grande, ya tenemos el diferencial de tiempo, pero no tenemos la velocidad para todo tiempo.

Es allí donde Sir Isaac Newton nos salva la vida.

Ya que:

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$$

Despejamos la aceleración y sustituimos las cantidades númericas.

$$6t(\hat{u}_x) = 2\vec{a}$$

$$\vec{a} = 3t(\hat{u}_x)$$

Tenemos la aceleración para todo tiempo, integramos y hallamos la velocidad para todo tiempo teniendo en cuenta que la particula parte del reposo.

$$\vec{v}(t) = \int_0^t 3t(\hat{u}_x)dT + v_0$$

$$\vec{v}(t) = \frac{3}{2}t^2(\hat{u}_x) \dots \dots (4)$$

Sustituimos (4) en (3)

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_{0}^{2s} 6t(\hat{u}_x) \cdot \frac{3}{2}t^2(\hat{u}_x)dt$$

Efectuamos el producto punto e integramos, usamos el teorema fundamental del calculo y se acabo.

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_{0}^{2s} 9t^3 dt$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_{0}^{2s} 9t^3 dt$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \frac{9}{4}t^4\Big|_0^2 = \frac{9}{4} * 2^4 - \frac{9}{4} * 0^4$$

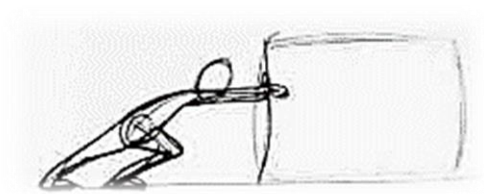
$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 36$$

Problema #49 Un obrero empuja horizontalmente una caja de 30 kg una distancia de 4.5 m en un piso plano, con velocidad constante. El coeficiente de friccion cinetica $\mu_k = 0.25$

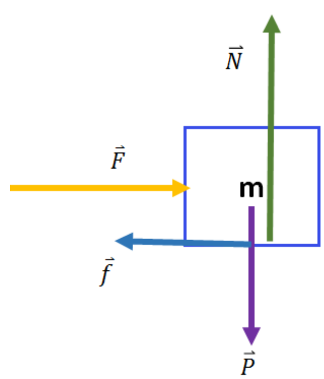
a) ¿Qué magnitud de fuerza debe aplicar el obrero?
b) ¿Cuánto trabajo efectua dicha fuerza sobre la caja?
c) ¿Cuánto trabajo efectua la fuerza de friccion sobre la caja?
d) ¿Cuánto trabajo efectua la fuerza normal sobre la caja?
e) ¿Cuánto trabajo efectua la fuerza de gravedad sobre la caja?
f) Calcule el trabajo total efectuado sobre la caja.

Solución. Pregunta a)

Realizamos un dibujo de la situación fisica.



Realizamos un diagrama de cuerpo libre sobre la caja.



Escribimos la segunda ley de Newton

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Descomponemos todas las fuerzas según un sistema de referencia elegido.

$$F(\hat{x}) + f(-\hat{x}) + N(\hat{y}) + mg(-\hat{y}) = 0$$

Escribimos las ecuaciones escalares.

$$F - f = 0 \ldots \ldots .(1)$$

$$N - mg = 0 \ldots \ldots \ldots .(2)$$

$$f = \mu_k N \ldots \ldots \ldots ..(3)$$

De (1) tenemos que el modulo de la fuerza F que realiza el obrero es igual en modulo a la fuerza de rose. Que a su vez es igual al modulo de la fuerza normal multiplicado por el coeficiente de friccion cinetica.

$$F = \mu_k mg$$

Sustituyendo las cantidades numericas.

$$F = 0.25 * 30(kg) * 10\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$F = 75 \text{ N}$$

Pregunta b)

Ahora según nuestro sistema de referencia.

$$\vec{F} = 75(\hat{x})\text{N}$$

Nos preguntan el trabajo realizado por dicha fuerza.

Por definición.

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_0^{4.5\ m} 75(\hat{x})\text{N} \cdot dx\ (\hat{x})$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_0^{4.5\ m} 75\ \text{N} \cdot dx$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 75\ \text{N} \int_0^{4.5\ m} dx$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 75\ \text{N} * \left(x \Big|_0^{4.5}\right)$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 75\ \text{N} * 4.5\ m$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 337.5\, Joul$$

Pregunta c)

Nos preguntan el trabajo realizado por la fuerza de rose. La cual según nuestro sistema de referencia.

$$\vec{f} = 75\text{N}(-\hat{x})$$

Por definición.

$$W_{\vec{f}}^{A\to B} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

$$W_{\vec{f}}^{A\to B} = \int_{0}^{4.5\,m} 75(-\hat{x})\text{N} \cdot dx\,(\hat{x})$$

$$W_{\vec{f}}^{A\to B} = \int_{0}^{4.5\,m} -75\text{ N} \cdot dx$$

$$W_{\vec{f}}^{A\to B} = -75\text{ N} \int_{0}^{4.5\,m} dx$$

$$W_{\vec{f}}^{A\to B} = -75\text{ N} * \left(x \Big|_{0}^{4.5}\right)$$

$$W_{\vec{f}}^{A\to B} = -75\text{ N} * 4.5\, m$$

$$W_{\vec{f}}^{A\to B} = -337.5\, Joul$$

Preguna d) Según nuestro sistema de referencia.

$$\vec{N} = 300\text{ N}(\hat{y})$$

$$W_{\vec{N}}^{A\to B} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

$$W_{\vec{N}}^{A\to B} = \int_{0}^{4.5\,m} 300\text{ N}(\hat{y}) \cdot dx\,(\hat{x})$$

$$W_{\vec{N}}^{A\to B} = \int_{0}^{4.5\,m} 0$$

$$W_{\vec{N}}^{A\to B} = 0$$

Preguna d) Según nuestro sistema de referencia.

$$\vec{P} = 300\ \mathrm{N}(-\hat{y})$$

$$W_{\vec{P}}^{A\to B} = \int_{A}^{B} \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

$$W_{\vec{P}}^{A\to B} = \int_{0}^{4.5\ m} 300\ \mathrm{N}(-\hat{y})\cdot dx\ (\hat{x})$$

$$W_{\vec{P}}^{A\to B} = \int_{0}^{4.5\ m} 0$$

$$W_{\vec{P}}^{A\to B} = 0$$

Pregunta f) El trabajo total efectuado sobre la caja es igual a la suma de los trabajos individuales de cada fuerza.

$$W_{\overrightarrow{Total}}^{A\to B} = W_{\vec{F}}^{A\to B} + W_{\vec{f}}^{A\to B} + W_{\vec{N}}^{A\to B} + W_{\vec{P}}^{A\to B}$$

Sustituyendo.

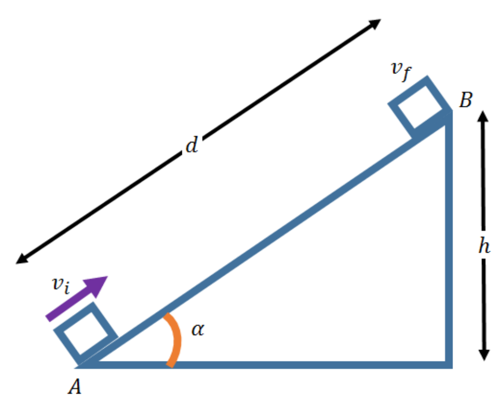
$$W_{\overrightarrow{Total}}^{A\to B} = 337.5\ J - 337.5\ J + 0 + 0$$

$$W_{\overrightarrow{Total}}^{A\to B} = 0$$

Problema #50 Imagine que pertenece a una cuadrilla de rescate alpino y debe proyectar hacia arriba una caja de suministros por una pendiente de ángulo α constante, de modo que llegue a un esquiador varada que está a una distancia vertical h sobre la base de la pendiente. La pendiente es resbalosa, pero hay cierta fricción presente, con coeficiente de fricción cinética μ_k. Use el teorema Trabajo-Energía para calcular la rapidez mínima que debe impartir a la caja en la base de la pendiente para que llegue al esquiador. Exprese su respuesta en términos de g, h, α y μ_k.

Solución.

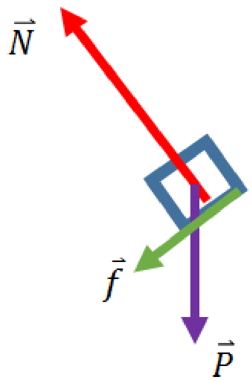
Realizamos un bosquejo de la situación.



Es claro que una vez se imprime una velocidad inicial a la caja, esta comienza a subir por la pendiente y debe recorrer una distancia d hasta llegar a la altura h donde se encuentra el esquiador.

¿Mientras la caja se mantiene en acenso cuales son las fuerzas que realizan trabajo?

Realizamos un diagrama de cuerpo libre para un intante de tiempo t cualquiera.

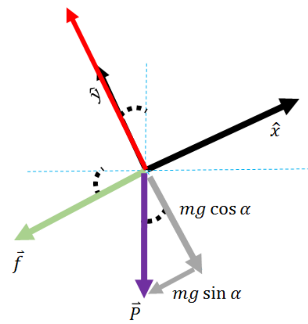


Escribimos la segunda ley de Newton

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Descomponemos las fuerzas según un sistema de referencia en con el eje x en direccion del desplazamiento.

$$N(\hat{y}) + f(-\hat{x}) + mg(\cos\alpha\,(-\hat{y}) + \sin\alpha\,(-\hat{x}) = ma(\hat{x})$$



Escribimos las ecuaciones escalares.

$$N - mg\cos\alpha = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$-f - mg\sin\alpha = ma \ldots\ldots..(2)$$

De (1) sabemos que

$$N = mg\cos\alpha$$

Y como la caja esta en movimiento se encuentra bajo un regimen cinetico. Luego se cumple que

$$f = \mu_k N$$

$$f = \mu_k mg\cos\alpha$$

Vemos fijamente a los ojos la situación fisica y nos damos cuenta que solo hay dos fuerzas que realizan trabajo. La fuerza de rose, y la componente paralela al desplazamiento del peso.

$$\vec{f} = \mu_k mg\cos\alpha\,(-\hat{x})$$

$$\vec{P}_{\parallel} = mg\sin\alpha\,(-\hat{x})$$

Sumando ambas fuerzas.

$$\vec{F}_{neta\ en\ x} = mg(\mu_k\cos\alpha + \sin\alpha)(-\hat{x})$$

Es hora de enunciar el teorema trabajo-energia.

$$W_{total}^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{neta} \cdot \vec{dr} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \ldots\ldots(3)$$

Trabajamos con la parte derecha de la ecuación, es decir buscamos el trabajo realizado por las fuerzas fricción y peso.

$$W_{F\,neta\,en\,x}^{A\to B} = \int_A^B mg(\mu_k \cos\alpha + \sin\alpha)(-\hat{x}) \cdot dx(\hat{x})$$

$$W_{F\,neta\,en\,x}^{A\to B} = \int_A^B -mg(\mu_k \cos\alpha + \sin\alpha) \cdot dx$$

$$W_{F\,neta\,en\,x}^{A\to B} = -mg(\mu_k \cos\alpha + \sin\alpha) \int_A^B dx$$

$$W_{F\,neta\,en\,x}^{A\to B} = -mg(\mu_k \cos\alpha + \sin\alpha)[x|_A^B]$$

$$W_{F\,neta\,en\,x}^{A\to B} = -mg(\mu_k \cos\alpha + \sin\alpha)(B - A)$$

Pero en nuestra situación fisica.

$$B - A = d$$

Y

$$d = \frac{h}{\sin\alpha}$$

Por tanto

$$W_{F\,neta\,en\,x}^{A\to B} = -\frac{mg(\mu_k \cos\alpha + \sin\alpha)h}{\sin\alpha}$$

Sustituimos en (3)

$$-\frac{mg(\mu_k \cos\alpha + \sin\alpha)h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Note que el ejercicio nos pide la rapidez minima que se debe impartir para que la caja llegue al esquiador. Es decir, en el punto B la rapidez puede ser cero, la cosa es que llegue ps.

$$-\frac{mg(\mu_k \cos\alpha + \sin\alpha)h}{\sin\alpha} = -\frac{1}{2}mv_A^2$$

Despejamos la rapidez inicial.

$$\frac{2gh(\mu_k \cos\alpha + \sin\alpha)}{\sin\alpha} = v_A^2$$

$$\sqrt{\frac{2gh(\mu_k \cos\alpha + \sin\alpha)}{\sin\alpha}} = v_A$$

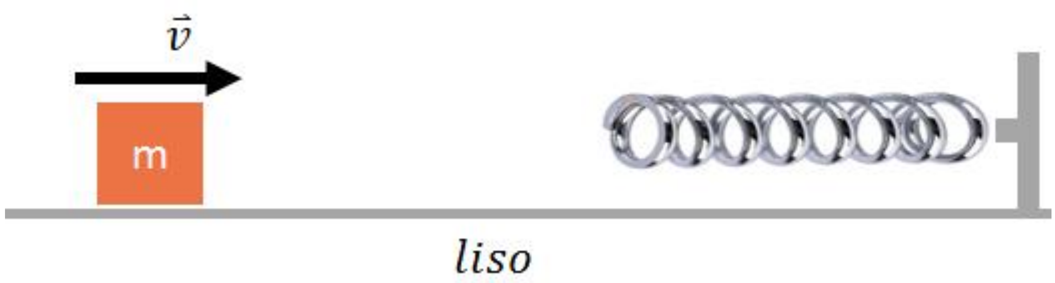
Simplificando.

$$\sqrt{2gh(1 + \mu_k \cot\alpha)} = v_A$$

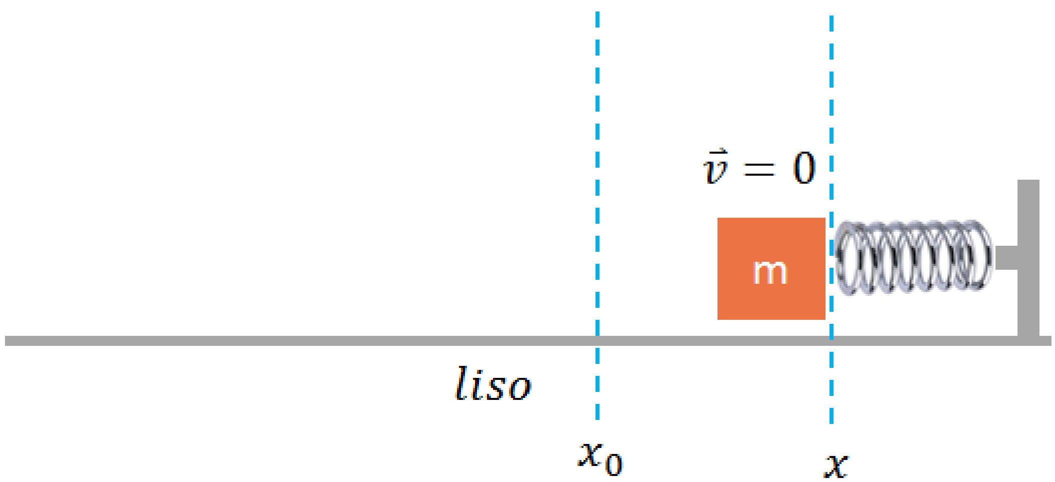
Problema #51 Una caja de 6.0 kg que se mueve a 3.0 (m/s), sobre una superficie horizontal sin fricción, choca con un resorte ligero cuya constante de fuerza $k = 75 \left(\frac{\text{N}}{\text{cm}}\right)$. Use el teorema del trabajo y energia para determinar la compresion maxima del resorte.

Solución.

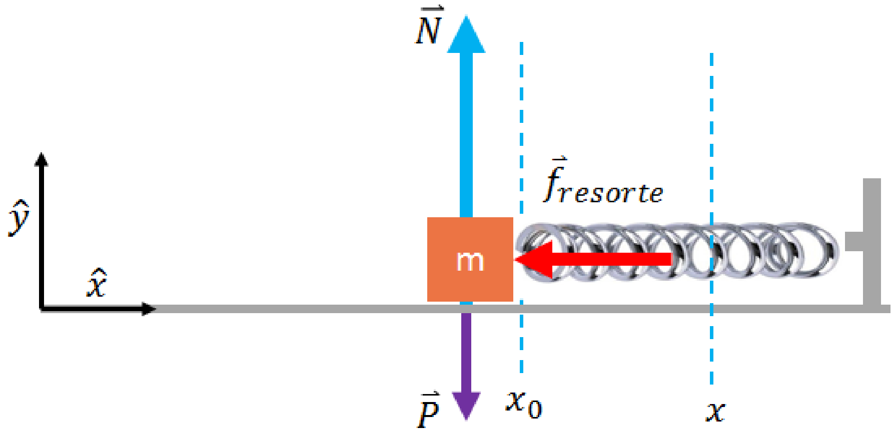
Realizamos un dibujo de la situación fisica.



Un tiempo t después, la caja choca a una velocidad inicial de 3.0 m/s con el resorte comprimiendolo una distancia x medido desde su largo natural x_0 hasta que se detiene.



Realizamos un diagrama de cuerpo libre sobre la caja cuando entra en contacto con el resorte. Fijamos un sistema de referencia con origen en $x_0 = 0$



Descomponemos las fuerzas según nuestro sistema de referencia.

$$\vec{\mathrm{N}} = \mathrm{N}(\hat{y})$$

$$\vec{f}_{res} = -kx(\hat{\imath})$$

$$\vec{P} = mg(-\hat{y})$$

Escribimos el teorema del trabajo y la energía.

$$W_{total}^{A \to B} = \int_A^B \vec{F}_{neta} \cdot \vec{dr} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \ \ldots \ldots .(1)$$

Es claro que la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza del resorte, dado que es la única paralela al desplazamiento que va a sufrir el resorte.

$$W_{\vec{f}_r}^{x_0 \to x} = \int_0^x -kx(\hat{x}) \cdot dx(\hat{x}) = \frac{1}{2} m v_x^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Luego la velocidad de la masa en el punto x es cero, pues esta se detiene.

$$W_{\vec{f}_r}^{x_0 \to x} = \int_0^x -kx(\hat{x}) \cdot dx(\hat{x}) = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\int_0^x -kx\, dx = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

$$-k \int_0^x x\, dx = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

$$k \int_0^x x\, dx = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\frac{k}{2}x^2\Big|_0^x = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$kx^2 = mv_0^2$$

Despejamos x

$$|x| = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}$$

Sustituyendo las cantiades númericas.

$$|x| = \sqrt{\frac{6 * (\mathrm{kg}) * (3)^2 * \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{75\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}} * \frac{100\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{m}}}}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{6 * 9 * (\mathrm{kg})(m^2/s^2)}{7{,}5 * 10^3 * \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{54\ \mathrm{N} * \mathrm{m}}{7{,}5 * 10^3 * \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{54\ \mathrm{m}^2}{7{,}5 * 10^3}}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{54}{7{,}5 * 10^3}}\,(\mathrm{m})$$

$$|x| \approx 0.085\ (\mathrm{m}) * \frac{100\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{m}}$$

$$|x| \approx 8{,}50\ (\mathrm{cm})$$

Problema #52 Un bloque de hielo con masa de 6 kg esta inicialmente en reposo en una superficie horizontal sin fricción. Un hombre le aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ constante en dirección del desplazamiento del bloque. El bloque se mueve sobre el eje x, de modo que su pocisión en función del tiempo esta dada por $x(t) = \alpha t^2 + \beta t^3$, donde $\alpha = 0.200 \left(\frac{m}{s^2}\right)$,$\beta = 0.0200 \left(\frac{m}{s^3}\right)$

a) Calcule la velocidad del objeto en $t = 4\ s$
b) Calcule la magnitud de $\vec{F}$ en $t = 4\ s$
c) Calcule el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ durante los primeros 4 s del movimiento.

Solución. Parte a)

Como tenemos la pocisión en función del tiempo. Podemos simplemente derivar y obtener la velocidad para todo tiempo, seguidamente evaluamos en t= 4s.

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(t)$$

$$\frac{d}{dt}\alpha t^2 + \beta t^3 = 2\alpha t + 3\beta t^2$$

$$v(t) = 2\alpha t + 3\beta t^2$$

Evaluamos en t=4s

$$v(t = 4s) = 2\alpha(4s) + 3\beta(4\ s)^2$$

$$v(t = 4s) = 8\alpha\ s + 48\beta\ s^2$$

Sustituyendo $\alpha\ y\ \beta$

$$v(t = 4s) = 8\left(\frac{0.200m}{s^2}\right)\ s + 48\left(\frac{0.0200m}{s^3}\right)\ s^2$$

$$v(t = 4s) = \frac{8}{5}\left(\frac{m}{s}\right) + \frac{24}{25}\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$v(t = 4s) = 2{,}56\left(\frac{m}{s}\right)$$

Solución parte b)

Para calcular el modulo de la fuerza $\vec{F}$ usaremos el teorema del trabajo y la energia. Teniendo en cuenta que la unica fuerza que realiza trabajo es la propia fuerza $\vec{F}$, ya que no hay fricción y es una superficie horizontal.

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot \vec{dr} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Además como tenemos la pocision del bloque de hielo para todo tiempo, podemos saber que distancia recorrio a los 4 s.

$$x(t=4s) = \alpha(4\ s)^2 + \beta(4\ s)^3$$

$$x(t=4s) = 16\alpha(\ s)^2 + 64\beta(\ s)^3$$

Sustituyendo $\alpha\ y\ \beta$

$$x(t=4s) = 16\left(\frac{0.200m}{s^2}\right)(\ s)^2 + 64\left(\frac{0.0200m}{s^3}\right)(\ s)^3$$

$$x(t=4s) = \frac{16}{5}(m) + \frac{32}{25}(m)$$

$$x(t=4s) = \frac{16}{5}(m) + \frac{32}{25}(m)$$

$$x(t=4s) = 4{,}48\ (m)$$

Así

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_0^{4{,}48\ (m)} \vec{F}(\hat{x})\cdot dx(\hat{x}) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_0^{4{,}48\ (m)} F\cdot dx = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

A los 4.48 (m) el modulo de la fuerza F es constante. Sale de la integral y la velocidad en el punto A es igual a cero pues esta parte del reposo.

$$F\int_0^{4{,}48\ (m)} dx = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$Fx\Big|_{0}^{4.48} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

La velocidad en el punto b la calculamos en la preguntaq anterior. $v_B = 2{,}56\ \left(\frac{m}{s}\right)$

$$F(4.48-0) = \frac{1}{2}*(6)*(2{,}56)^2$$

Despejamos F

$$F = \frac{3 * (2{,}56)^2}{4{,}48}$$

$$F = 4{,}39 \text{ N}$$

Parte c) Ahora sabemos que

$$\vec{F} = 4{,}39\ (\hat{x})\text{N}$$

Por definición.

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_A^B \vec{F}(\hat{x}) \cdot dx(\hat{x})$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_0^{4{,}48\ (m)} 4{,}39\ (\hat{x}) \cdot dx(\hat{x})$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int_0^{4{,}48\ (m)} 4{,}39\ dx$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 4{,}39 \int_0^{4{,}48\ (m)} dx$$

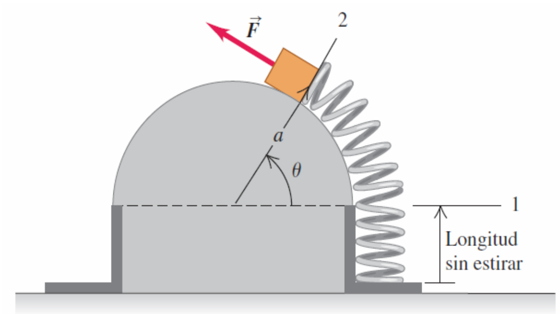
$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 4{,}39x \Big|_0^{4{,}48}$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 4{,}39(4{,}48 - 0)$$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 4{,}39(4{,}48 - 0)$$

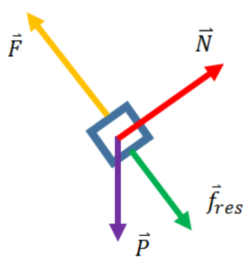
$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = 19{,}7\ \mathcal{J}$$

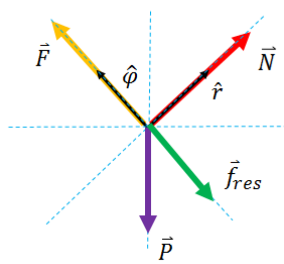
Problema #53 Una fuerza $\vec{F}$ se mantiene tangente a una superficie semicircular sin fricción. Se varía lentamente la fuerza para mover un bloque de masa m, estirando de la posición 1 a la 2 un resorte que está unido al bloque. El resorte tiene masa despreciable y constante de fuerza k. El extremo del resorte rescribe un arco de radio a. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$.



Solución.

Realizamos un diagrama de cuerpo libre sobre la caja. Usaremos, las muy conocidas y no queridas coordenadas polares ☹ . Pero calma que si se puede.





Escribimos la 2 ley de Newton.

$$\vec{N} + \vec{F} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Descomponemos todas las fuerzas según el sistema seleccionado.

$$N(\hat{r}) + mg\big(\cos\theta\,(-\hat{\varphi}) + \sin\theta\,(-\hat{r})\big) - kx(\hat{\varphi}) + F(\hat{\varphi}) = ma(-\hat{r})$$

Escribimos las ecuaciones escalares.

$$F - mg\cos\theta - kx = 0 \,\ldots\ldots (1)$$

$$N - mg\sin\theta = -ma_c \,\ldots\ldots (2)$$

De la ecuación (1) podemos hallar el modulo de la fuerza F a la cual calcularemos su trabajo.

$$F = mg\cos\theta + kx$$

Así,

$$\vec{F} = (mg\cos\theta + kx)(\hat{\varphi})$$

Por definición.

$$W_F^{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} \,\ldots\ldots (3)$$

Ahora bien, cosas que son importantes aprender con este ejercicio.

#1) Hablemos de la trayectoria que sigue la fuerza F que realiza trabajo. Podemos decir que va desde 1 hasta 2 en principio. Luego eso no nos sirve,este ejercicio en concreto lo más comodo es decir que el punto 1 es igual a 0 y el punto 2 igual a θ_0. Es decir rescribiremos todas las cantidades en terminos del ángulo θ.

#2) La trayectoria que une los puntos 1 y 2 forma una semicircunferencia de arco y el camino recorrido va desde 1 hasta 2, mejor dicho de 0 hasta a θ_0 , es decir en la dirección tangencial $\hat{\varphi}$. Luego, debemos tomar una longitud de arco infinitesimal. Recordemos que la longitud de arco,en general, se mide en función del radio y el ángulo como $\vec{s} = R\theta$. Por tanto en nuestro caso particular.

$$\vec{dr} = ad\theta(\hat{\varphi})$$

Donde a es el radio del circulo y el $d\theta$ nos esta diciendo, "ese ángulo es infitesimal".

#3) Por último, la fuerza $\vec{F} = mg\cos\theta + kx$, note que "$x$" es una variable de desplamiento, esta debemos escribirla en terminos de θ tambien. Es claro que el resorte se desplaza por el arco de la semicircunferencia, luego $x = a\theta$

Asi, reescribimos

$$\vec{F} = (mg\cos\theta + ka\theta)(\hat{\varphi})$$

Ahora sí, volvamos a nuestra definición de trabajo en la ecuación (3)…

Habiamos dicho que:

$$W_F^{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

Considerando el punto #1)

$$W_F^{0\to\theta_0} = \int_0^{\theta_0} \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

Considerando el punto #2)

$$W_F^{0\to\theta_0} = \int_0^{\theta_0} \vec{F}\cdot\, ad\theta(\hat{\varphi})$$

Considerando el punto #3)

$$W_F^{0\to\theta_0} = \int_0^{\theta_0} (mg\cos\theta + ka\theta)(\hat{\varphi})\cdot\, ad\theta(\hat{\varphi})$$

Esta es la manera en la que paso a paso se arma la integral de linea y todos los ejercicios en donde se realice trabajo con una fuerza por medio de una trayectoria .

Resolvemos,

$$W_F^{0\to\theta_0} = \int_0^{\theta_0} (mg\cos\theta + ka\theta)(\hat{\varphi}) \cdot \, ad\theta(\hat{\varphi})$$

Realizamos el producto punto,

$$W_F^{0\to\theta_0} = \int_0^{\theta_0} (mg\cos\theta + ka\theta)\, ad\theta$$

Propiedad distributiva y propiedad de linealidad de la suma en la integrales,

$$W_F^{0\to\theta_0} = \int_0^{\theta_0} (mg\cos\theta) ad\theta + \int_0^{\theta_0} (ka\theta) ad\theta$$

Propiedad de linealidad de las integrales: las constantes salen fuera de la integral,

$$W_F^{0\to\theta_0} = amg\int_0^{\theta_0} \cos\theta\, d\theta + a^2k\int_0^{\theta_0} \theta d\theta$$

Integramos,

$$W_F^{0\to\theta_0} = amg\sin\theta \,\Big|_0^{\theta_0} + a^2k\frac{\theta^2}{2}\Big|_0^{\theta_0}$$

Usamos el teorema fundamental del calculo: evaluar los limites de integración en la primitiva,

$$W_F^{0\to\theta_0} = amg\sin\theta_0 - \cancel{amg\sin 0} + a^2k\frac{{\theta_0}^2}{2} - \cancel{a^2k\frac{0^2}{2}}$$

Simplificamos

$$W_F^{0\to\theta_0} = amg\sin\theta_0 + a^2k\frac{\theta_0^2}{2}$$

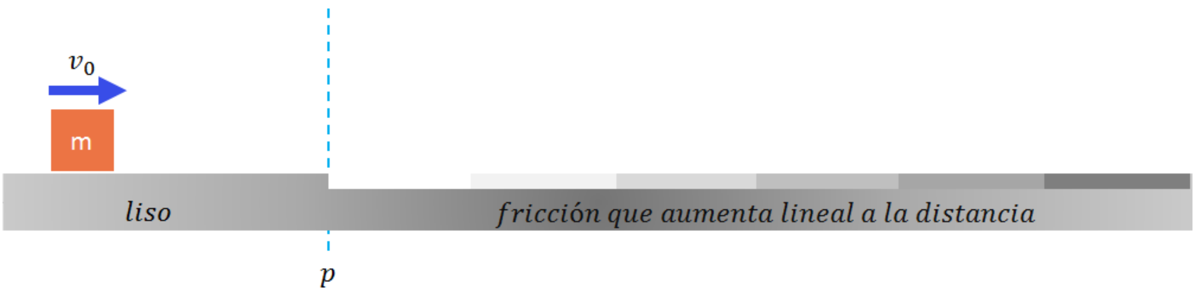
Nota importante: Este es uno de los ejercicios más ilustrativos acerca de como calcular el trabajo realizado en una trayectoria circular con fuerza no conservativas. Los puntos #1, #2 y #3 son de entera importancia. Además recuerde que la fuerza elastica realizada por un resorte ideal siempre **<u>“SIEMPRE”</u>** es $\overrightarrow{f_{res}} = -k(\hat{\ })$, el vector unitario en blanco indica alguna dirección, **<u>bajo ningun motivo cambie el signo</u>** de esta fuerza, simpre funciona sin importar el sistema de referencia que usted elija.

Problema #54 Una caja resbala con una rapidez de $4{,}50\left(\frac{m}{s}\right)$ por una superficie horizontal cuando en el punto p, se topa con una sección áspera. Aquí, el coeficiente de fricción no es constante: inicia en 0.100 en p y aumenta linealmente con la distancia despues de p, alcanzando un valor de 0.600 en $12{,}5$ (m) más alla de p.

a) Utilice el teorema del trabajo y la energia para obtener la distancia total recorrida por la caja en la sección áspera medido desde el punto p.
b) Determine el coeficiente de rose en el punto donde se detuvo la caja.
c) ¿Qué distancia hubiese recorrido la caja si el coeficiente de fricción se hubiese mantenido constante a lo largo de la sección áspera con valor de 0.100.

Solución parte a)

Realizamos un dibujo de la situación fisica.



El degragado en el área con fricción indica que cada vez la pista se vuelve más áspera.

Nuestra intuición nos dice que en el área lisa la caja mantendrá su velocidad (ignorando el rose del viento y cualquier otra fuerza que pueda detenerla) hasta llegar al punto p. De allí en adeltante su velocidad ira disminuyendo hasta cero y eventualmente detenerse a una distancia x medida desde p

Leemos los datos del problema:

#1) nos dice que la caja viaja con una rapidez de $4{,}50$ $\left(\frac{m}{s}\right)$, asi que esta será la rapidez con la que llegue al punto p.

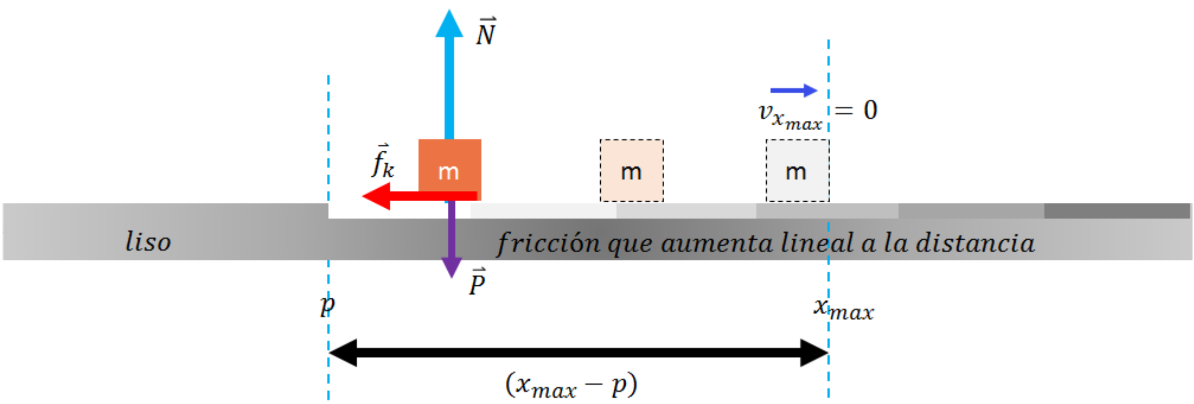
#2) nos dice que el coeficiente fricción, en esta caso cinético, aumenta **linealmente** con la distancia después de p.

Asi, el coeficiente de fricción cinética puede escribirse en general de la forma.

$$\mu_k = \alpha x + \beta$$

Donde α y β son constante a derterminar. Y “x” es la distancia que varia según avance la caja por la sección áspera.

Realizamos un diagrama de cuerpo libre sobre la caja en un instante t cualquiera una vez ingreso a la sección aspera.



Escribimos la segunda ley de Newton.

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_k = m\vec{a}$$

Escogemos un sistema de refencia con origen en p y dirección $\hat{x}$ positiva en dirección del desplazamiento y dirección $\hat{y}$ positiva en dirección de la fuerza normal. Descomponemos todas nuestras fuerzas.

$$N(\hat{y}) + mg(-\hat{y}) + f_k(-\hat{x}) = ma(\hat{x})$$

Escribimos las ecuaciones escalares.

$$N - mg = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$-f_k = ma \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1) tenemos que el modulo de la fuerza normal es:

$$N = mg$$

Y como estamos bajo un regimen cinético siempre se cumple que:

$$f_k = \mu_k N$$

Lo cual nos lleva a determinar el modulo de la fuerza de rose cinetica como:

$$f_k = (\alpha x + \beta)mg$$

Asi, el vector fuerza de rose cinético según nuesto sistema de referencia es:

$$\vec{f}_k = (\alpha x + \beta)mg(-\hat{x}) \ldots\ldots (3)$$

Escribimos el teorema del trabajo y la energia.

$$W_{\vec{F}_{neta}}^{a\to b} = \int_a^b \vec{F}_{neta} \cdot \vec{dr} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

La fuerza neta es la suma de todas las fuerzas en nuestro diagrama de cuerpo libre, pero es claro que de todas esas fuerzas solo la fuerza de rose realizará trabajo ya que es la unica que esta paralela al desplamiento. Ahorrandonos escribir toda la fuerza neta, escribiremos solo la que hace trabajo.

Asi,

$$W_{f_k}^{p\to x_{max}} = \int_p^{x_{max}} \vec{f}_k \cdot \vec{dr} = \frac{1}{2}mv_{x_{max}}^2 - \frac{1}{2}mv_p^2 \dots\dots(5)$$

Tomamos un diferencial de desplazamiento en la dirección $\hat{x}$ positivo.

Entonces,

$$\vec{dr} = dx(\hat{x}) \dots\dots(6)$$

Sustituimos (6) y (3) en (5)

$$W_{f_k}^{p\to x_{max}} = \int_p^{x_{max}} (\alpha x + \beta)mg(-\hat{x}) \cdot dx(\hat{x}) = \frac{1}{2}mv_{x_{max}}^2 - \frac{1}{2}mv_p^2$$

Por condiciones del problema, la velocidad de la caja en el punto donde se detiene es cero. Y el punto p lo hemos elegido como el origen desde donde se mide la distancia total recorrida.

Asi,

$$W_{f_k}^{p\to x_{max}} = \int_0^{x_{max}} (\alpha x + \beta)mg(-\hat{x}) \cdot dx(\hat{x}) = \frac{1}{2}mv_{x_{max}}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W_{f_k}^{p\to x_{max}} = \int_0^{x_{max}} (\alpha x + \beta)mg(-\hat{x}) \cdot dx(\hat{x}) = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Realizamos el producto punto.

$$W_{f_k}^{p\to x_{max}} = \int_0^{x_{max}} [-(\alpha x + \beta)mg]dx = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Los signos menos se cancelan a ambos lados de la igualdad.

$$W_{f_k}^{p\to x_{max}} = \int_0^{x_{max}} [(\alpha x + \beta)mg]dx = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Distributiva y propiedades de linealidad de la integral,

$$\alpha mg\int_0^{x_{max}} xdx + \beta mg\int_0^{x_{max}} dx = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Integramos,

$$\frac{1}{2}\alpha mgx^2\Big|_0^{x_{max}} + \beta mgx\Big|_0^{x_{max}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Teorema fundamental del calculo,

$$\frac{1}{2}\alpha mg(x_{\max})^2 + \beta mgx_{max} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Simplificamos el termino m,

$$\frac{1}{2}\alpha g(x_{\max})^2 + \beta mgx_{max} = \frac{1}{2}v_0^2$$

Restamos $\frac{1}{2}v_0^2$ a ambos lados de la igualdad,

$$\frac{1}{2}\alpha g(x_{\max})^2 + \beta gx_{max} - \frac{1}{2}v_0^2 = 0 \ldots\ldots..(7)$$

La expresión (7) tiene la forma de una ecuación de segundo orden en terminos de x_{max}

Donde

$$a = \frac{1}{2}\alpha g \;\; , b = \beta g \quad \text{y} \quad c = -\frac{1}{2}v_0^2$$

Por resolvente,

$$x_{max} = \frac{-\beta g \pm \sqrt{(\beta g)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\alpha g\right)\left(-\frac{1}{2}v_0^2\right)}}{2\left(\frac{1}{2}\alpha g\right)}$$

Simplificando,

$$x_{max} = \frac{-\beta g \pm \sqrt{(\beta g)^2 + \alpha g v_0^2}}{\alpha g}$$

De aquí hay dos posibles respuestas, una necesariamente negativa pues hay dos cantidades que se restan, dicha solución es desechada y nos quedamos con la solución positiva, pues es la que tiene sentido fisico al ser la variable una distancia.

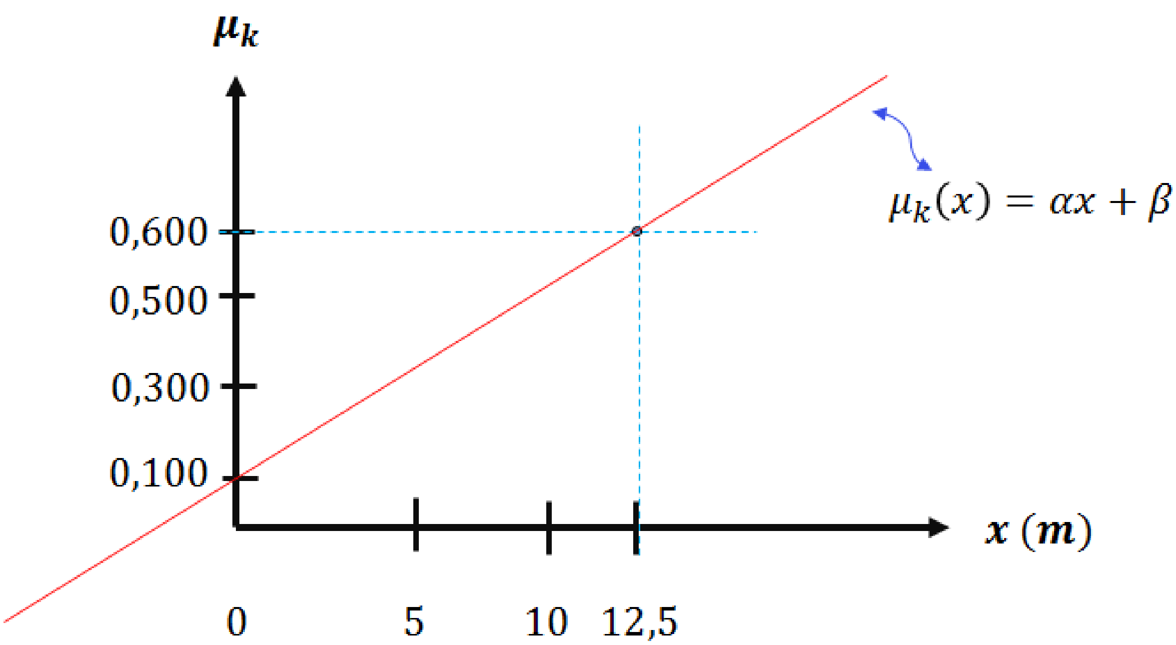
$$x_{max} = \frac{-\beta g + \sqrt{(\beta g)^2 + \alpha g v_0^2}}{\alpha g} \ldots\ldots.(8)$$

Sólo nos queda hallar las constantes α y β, sustituir todas las cantidades númericas en la ecuación y realizar el algebra corespondiente.

Veamos como se calculan dichas constantes,

Regresando al problema, nos informan que el coeficiente de fricción no es constante: inicia en 0.100 en p y aumenta linealmente con la distancia despues de p, alcanzando un valor de 0.600 en $12{,}5$ (m) más alla de p

Luego con esta información podemos realizar un gráfico del coeficiente cinetico en función de la posición x. Es decir,



Y entonces, α es la pendiente y β el punto de corte con el eje "y" de la función $\mu_k(x)$

Es decir,

$$\beta = 0{,}100$$

Y la pendiente se calcula como la distancia en "y" entre la distancia en "x"

$$\alpha = \left(\frac{0.600 - 0.100}{12.5}\right)$$

$$\alpha = 0.04$$

Es claro ahora que:

$$\mu_k(x) = 0.04x + 0.100 \ldots \ldots (9)$$

Sustituyendo los valores en la expresión (8) hallamos la respuesta a la pregunta a.

$$x_{max} = \frac{-0.100 * 10 + \sqrt{(0.100 * 10)^2 + 0.04 * 10 * (4.5)^2}}{0.04 * 10}$$

$$x_{max} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8.1}}{0.4}$$

$$x_{max} = \frac{-1 + \sqrt{9.1}}{0.4}$$

$$x_{max} \approx 5{,}04\ (m)$$

Solución parte b)

Como ya tenemos la distancia a la que se detuvo, es solo evaluar el coeficiente en dicha pocisión.

$$\mu_k(x_{max}) = 0.04(5.04) + 0.100$$

$$\mu_k(x_{max}) \approx 0.302$$

Solución parte c) Cuanto hubiese recorrido si el coeficiente de rose fuese constante.

$$\vec{f}_k = \mu_k mg(-\hat{x})$$

Por definición

$$W_{f_k}^{p \to x_{max}} = \int_p^{x_{max}} \vec{f}_k \cdot \vec{dr} = \frac{1}{2} m v_{x_{max}}^2 - \frac{1}{2} m v_p^2$$

$$W_{f_k}^{0 \to x_{max}} = \int_0^{x_{max}} \mu_k mg(-\hat{x}) \cdot dx(\hat{x}) = \frac{1}{2} m v_{x_{max}}^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

De igual forma en el punto x_{max} su velocidad es cero luego,

$$W_{f_k}^{0 \to x_{max}} = \int_0^{x_{max}} \mu_k mg(-\hat{x}) \cdot dx(\hat{x}) = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

Realizamos el producto punto

$$W_{f_k}^{0\to x_{max}} = \int_0^{x_{max}} -\mu_k mg\, dx = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Sacamos las constasnte de la integral,

$$W_{f_k}^{0\to x_{max}} = -\mu_k mg \int_0^{x_{max}} dx = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Simplificamos los signos,

$$W_{f_k}^{0\to x_{max}} = \mu_k mg \int_0^{x_{max}} dx = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Integramos,

$$W_{f_k}^{0\to x_{max}} = \mu_k mgx|_{0}^{x_{max}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Usamos el teorema fundamental del calculo y simplificamos las masas,

$$\mu_k mgx_{max} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Despejamos x_{max}

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{2\mu_k g}$$

Sustituimos las cantidades numericas,

$$x_{max} = \frac{(4.50)^2}{2 * 0.100 * 10}$$

$$x_{max} = \frac{20.25}{2}$$

$$x_{max} = 10{,}13\ (m)$$

Es claro que con un coeficiente de rose constante a lo largo de la sección áspera la particula viajará una mayor distancia.

Problema #54

142. La figura representa un péndulo de 9 m de longitud y masa M=3 kg. El punto X es el más alto y Z el más bajo de la trayectoria. La rapidez de M, en m/s, en el punto Z es

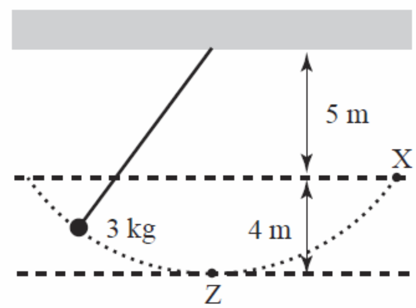
A) $2\sqrt{5}$.

B) $4\sqrt{5}$.

C) $6\sqrt{5}$.

D) 10.

E) diferente de las otras 4 opciones.



Solución: se cumple que

$$w_{total}^{X\to Z} = \Delta K$$

En este caso la fuerza de la tensión a lo largo de toda la trayectoria es perpendicular luego no realiza trabajo, se desprecia la fuerza de rose del aire. Entonces solo hace trabajo la fuerza de gravedad.

Sabemos que la fuerza de gravedad es una fuerza conservativa,

Luego,

$$-\Delta \mathrm{U}_g = \Delta \mathrm{K}$$

Desarrollando, se toma un sistema de referencia con origen en el punto Z

$$-(mg0 - mgX) = \frac{1}{2}mv_0^2 - m\frac{1}{2}v_X^2$$

Luego en la altura maxima la velocidad es cero,

$$mgX = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Simplificando las m y despejando v_0

$$gX = \frac{1}{2}v_0^2$$

$$\sqrt{2gX} = v_0$$

Sustituyendo las cantidades númericas,

$$v_0 = \sqrt{2*10*4} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Problema #55

144. Una piedra de masa M se arroja verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v_0. Suponga que la fuerza de roce con el aire es constante y de módulo nMg (con n una constante positiva). La altura máxima h que alcanza la piedra es

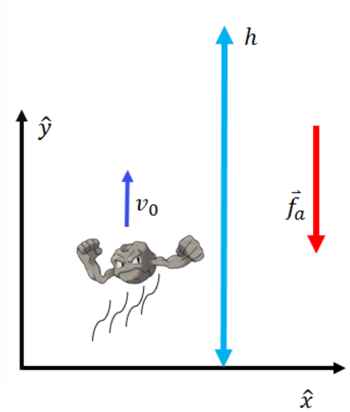
A) $h = \frac{v_0^2}{2g(1-n)}$

B) $h = \frac{v_0^2}{2gn}$

C) $h = \frac{v_0^2}{2g}$

D) $h = \frac{v_0^2}{2g} - n$

E) $h = \frac{v_0^2}{2g(1+n)}$



Solución:

$$W_{total}^{0\to h} = \Delta K$$

$$W_{F\,cons}^{0\to h} + W_{F\,no\,cons}^{0\to h} = \Delta K$$

Las únicas fuerzas que realizan trabajo son la fuerza de gravedad y la fuerza de fricción del aire.

$$-\Delta U_g + \int_0^h nMg(-\hat{y}) \cdot dy(\hat{y}) = \Delta K$$

Resolvemos la integral de linea para hallar el trabajo realizado por la fuerza debido al aire.

$$-\Delta U_g - \int_0^h nMg \cdot dy = \Delta K$$

$$-\Delta U_g - nMg \int_0^h dy = \Delta K$$

$$-\Delta U_g - nMgy\Big|_0^h = \Delta K$$

$$-\Delta U_g - nMgh = \Delta K$$

Desarrollamos las expresiones de energia potencial debido a la gravedad y energia cinética.

$$-(Mgh - Mg0) - nMgh = \frac{1}{2}Mv_h^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2$$

Es claro que la velocidad en h es cero pues alcanza su máxima altura.

$$-(Mgh) - nMgh = -\frac{1}{2}Mv_0^2$$

Multiplicando por menos a ambos lados de la igualdad

$$(Mgh) + nMgh = \frac{1}{2}Mv_0^2$$

Extraemos factor común Mh

$$Mh(g + ng) = \frac{1}{2}Mv_0^2$$

Simplificamos las M

$$h(g + ng) = \frac{1}{2}v_0^2$$

Despejamos h

$$h = \frac{v_0^2}{2(g + ng)}$$

Extraemos factor común g

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + n)}$$

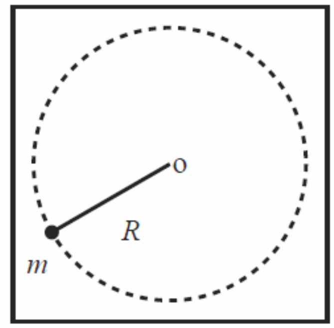
Nota: Este me salio en el último parcial.

Problema #56

149. Una partícula de masa m atada a una cuerda tensa de radio R gira sobre una mesa horizontal con roce, siendo el coeficiente de roce dinámico μ, ver figura. La partícula inicia su movimiento con una rapidez v_0.

a. Halle la rapidez de la partícula cuando ha girado un ángulo θ (en radianes).

b. Tome $R = 1/2$ m, $\mu = 0.1$ y $v_0 = 4$ m/s y calcule cuántas vueltas da la partícula antes de detenerse.



Solución. Parte a)

Lo complejo de este ejercicio es percatarse que la particula gira en una mesa horizontal. Luego tanto la fuerza normal como el peso no realizan trabajo, pues estas dos fuerzas son perpendiculares a la trayectoria de la particula.

Además se cumple que:

$$N = mg$$

En consecuencia,

$$f_k = \mu_k mg$$

Escribimos el teorema del trabajo y la energia

$$W_{total}^{0\to\theta} = \int_0^\theta \vec{f_k} \cdot \vec{dr} = \Delta K$$

$$\int_0^\theta \vec{f_k} \cdot \vec{dr} = \Delta K$$

Donde,

$$\vec{dr} = Rd\theta\left(\hat{\delta}\right) \;\; y \;\; \vec{f_k} = \mu_k mg(-\hat{\delta})$$

Con, $\hat{\delta}$ un vector en la dirección tangencial del movimiento.

Asi,

$$\int_0^\theta \mu_k mg(-\hat{\delta}) \cdot Rd\theta\left(\hat{\delta}\right) = \Delta K$$

Realizamos el producto punto.

$$\int_0^\theta -\mu_k mgRd\theta = \Delta K$$

Salen las constantes de la integral,

$$-\mu_k mgR\int_0^{\theta} d\theta = \Delta K$$

Integramos,

$$-\mu_k mgR\theta|_0^{\theta} = \Delta K$$

Teorema fundamental del calculo,

$$-\mu_k mgR\theta = \Delta K$$

Desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación concerniente a la energia cinética,

$$-\mu_k mgR\theta = \frac{1}{2}mv_{\theta}^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

Despejamos la rápidez para el angulo θ y simplificamos,

$$-\mu_k gR\theta + \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\theta}^2$$

$$-2\mu_k gR\theta + v_0^2 = v_{\theta}^2$$

$$\sqrt{v_0^2 - 2\mu_k gR\theta} = v_{\theta}$$

Solución parte b)

Cuando la particula se detiene su velocidad final es cero.

Luego,

$$\sqrt{v_0^2 - 2\mu_k gR\theta} = 0$$

Elevamos al cuadrado a ambos lados de la igualdad

$$v_0^2 - 2\mu_k gR\theta = 0$$

Sabemos que para dar 1 vuelta se debe recorrer un angulo $\theta = 2\pi$

Sustituimos,

$$v_0^2 - 2\mu_k gR2\pi = 0$$

Despejamos,

$$v_0^2 = 2\mu_k gR2\pi$$

Dividimos a ambos lados de la igualdad por el termino $2\mu_k gR2\pi$

$$\frac{v_0^2}{4\pi Rg\mu_k} = 1\ vueltas,$$

Sustituimos las cantidades númericas,

$$\frac{(4.0)^2\left(\frac{m}{s}\right)^2}{4\pi\left(\frac{1}{2}\right)(m)10\left(\frac{m}{s^2}\right)0.1} = 1\ vueltas$$

$$\frac{16\left(\frac{m}{s}\right)^2}{2\pi\left(\frac{m^2}{s^2}\right)} = 1\ vueltas$$

$$\frac{8}{\pi} = 1\ vueltas$$

$$\frac{8}{\pi} = 1\ vueltas$$

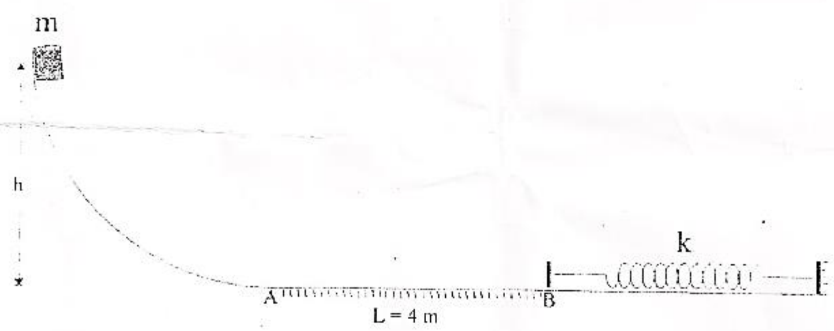
$$2{,}5 = 1 vueltas$$

Dividimos por 1 a ambos lados de la igualdad

$$2{,}5 = vueltas$$

Problema #57

6.- Un bloque de masa m = 5kg se suelta desde una altura h=5m deslizando por una rampa sin fricción. A partir del punto **A** se tiene una superficie horizontal con fricción ($\mu_k = 0.4$). Luego de recorrer una distancia L = 4m se encuentra un resorte de constante k = 500N/m. Determine: a) La velocidad del bloque en el punto B (justa antes de tener contacto con el resorte) (5 ptos), y b) determine la compresión máxima del resorte. (5 ptos)



Solución parte a)

Usaremos el teorema del trabajo energia. Todas las alturas serán medidas desde la base de la rampa. Es decir, en la base la energia potencial gravitacional es cero.

Energia en el punto h

$$E_h = U_g + K = mgh + \frac{1}{2}mv_h^2$$

Energia en el punto A

$$E_A = U_g + K = 0 + \frac{1}{2}mv_A^2$$

En el tramo que va desde H hasta A solo realizan trabajo fuerzas conservativas, luego por conservación de la energia se cumple que:

$$E_h = E_A$$

Esto es,

$$mgh + \frac{1}{2}mv_h^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_A^2$$

Pero, la velocidad inicial en el punto h es cero, pues el enunciado dice que la masa “se solto”, es decir velocidad inicial cero.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 = K$$

Es decir la Energia en el punto A es solo cinética y tiene un valor de mgh.

$$E_A = mgh$$

Energia en el punto B

$$E_B = U_g + K = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Sabemos que,

$$\Delta E_{AB} = W_{NC}^{A\to B} \ldots\ldots(1)$$

Calculamos el trabajo realizado por la fuerza no conservativa, en este caso la fuerza de rose. Es claro que durante el trayecto que va desde A hasta B el módulo de la fuerza de rose dinámica es:

$$f_k = \mu_k mg$$

Luego la fuerza de rose dinámico es una fuerza que se opone al movimiento relativo entre los cuerpos, en este caso. Se define el vector $\hat{x}$ en dirección del desplazamiento de la caja.

Asi,

$$\vec{f_k} = \mu_k mg(-\hat{x})$$

Por definición,

$$W_f^{A\to b} = \int_A^B \vec{f_k}\cdot \vec{d}r = \int_A^B \mu_k mg(-\hat{x})\cdot dx(\hat{x})$$

Realizamos el producto punto,

$$W_f^{A\to b} = \int_A^B -\mu_k mgdx$$

Integrando,

$$W_f^{A\to b} = -\mu_k mgx|_A^B$$

Usando el teorema fundamental del cálculo,

$$W_f^{A\to b} = -\mu_k mg(B-A)$$

Pero

$$(B-A) = L$$

Asi,

$$W_f^{A\to b} = -\mu_k mgL \ldots\ldots(2)$$

Sustituyendo en (2) en (1)

$$\Delta E_{AB} = -\mu_k mgL$$

Pero,

$$\Delta E_{AB} = E_B - E_A$$

Asi,

$$E_B - E_A = -\mu_k mgL$$

Sustituimos las energias correspondientes,

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = -\mu_k mgL$$

Despejamos la incognita v_B^2

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh - \mu_k mgL$$

$$\frac{1}{2}v_B^2 = gh - \mu_k gL$$

$$v_B^2 = 2g(h - \mu_k L)$$

$$v_B = \pm\sqrt{2g(h - \mu_k L)}$$

Como la caja va en la dirección postiva, entonces:

$$v_B = +\sqrt{2g(h - \mu_k L)}$$

Sustituimos las cantidades númericas,

$$v_B = \sqrt{2 * 10\left(\frac{m}{s^2}\right)(5 - 0.4 * 4)m}$$

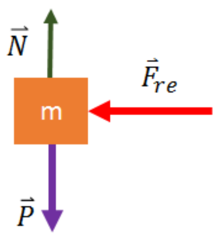
$$v_B = \sqrt{20 * \left(5 - \frac{8}{5}\right)(m^2/s^2)}$$

$$v_B = \sqrt{20 * \left(\frac{17}{5}\right)}\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$v_b = 2\sqrt{17}\left(\frac{m}{s}\right)$$

Solución parte b) Esta parte se resuelve usando un método similiar al usado en el ejercicio #44

Realizamos un diagrama de cuerpo libre sobre la masa junto en el instante que toca la base del resorte,



Luego la fuerza del resorte es la única fuerza que realiza trabajo desde el punto B hasta una distancia x_{max} de compresión. Definimos un nuevo sistema de referencia con origen en B tal que desde ese punto midamos la distancia que se comprime el resorte.

Por el teorema del trabajo y la Energia.

$$W_F^{B\to x_{max}} = \int_B^{x_{max}} -kx(\hat{x}) \cdot dx(\hat{x}) = \Delta K_{Bx_{max}}$$

Realizamos el producto punto,

$$\int_B^{x_{max}} -kxdx = \Delta K_{Bx_{max}}$$

Integramos,

$$-kx^2|_B^{x_{max}} = \frac{1}{2}mv_{x_{max}}^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

Usando el teorema fundamental del calculo,

$$-kx_{max}^2 + kB^2 = \frac{1}{2}mv_{x_{max}}^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

La condición para que el resorte se comprima al maximo es que la velocidad de la caja en el punto x_{max} sea igual a cero,

$$-kx_{max}^2 + kB^2 = -\frac{1}{2}mv_B^2$$

Como definimos el punto B como el origen del sistema a partir de donde se comienza a medir la distancia tenemos que:

$$-kx_{max}^2 + k0^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-kx_{max}^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Despejamos x_{max}

$$x_{max}^2 = \frac{mv_0^2}{2k}$$

$$|x_{max}| = \sqrt{\frac{mv_0^2}{2k}}$$

Sustituyendo las cantidades númericas,

$$|x_{max}| = \sqrt{\frac{5\ (kg) * 68 \left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{2 * 500 \left(\frac{\mathrm{N}}{m}\right)}}$$

$$|x_{max}| = \sqrt{\frac{340(kg)\left(\frac{m}{s^2}\right)(\mathrm{m})}{1000\left(\frac{\mathrm{kg} * \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{m}\right)}}$$

$$|x_{max}| = \sqrt{\frac{34(\mathrm{N})(\mathrm{m})}{100\left(\frac{\mathrm{N}}{m}\right)}}$$

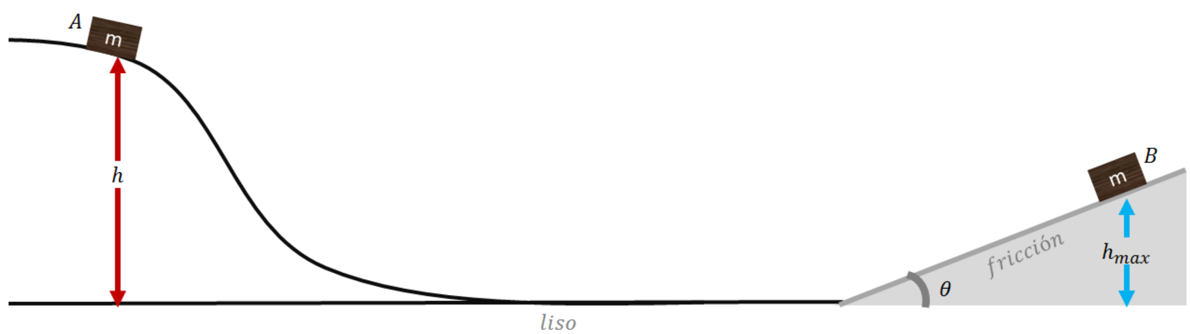
$$|x_{max}| = \sqrt{\frac{34}{100}(m^2)}$$

$$|x_{max}| = \sqrt{\frac{34}{100}(m^2)}$$

$$|x_{max}| = \frac{\sqrt{34}}{10}(\mathrm{m})$$

$$|x_{max}| \approx 0.58\ (\mathrm{m})$$

Problema #58 Un bloque parte del reposo desde una altura $h = 6$ (m) se desliza hacia abajo por una pista curva sin fricción. Luego el bloque sube por un plano inclinado áspero que forma un ángulo $\theta = 36.9°$ con la horizontal. Si la altura máxima alcanzada es $h_{max} = 5$ (m), determine el coeficiente de rose cinético entre el bloque y el plano inclinado.



Solución

Usaremos el teorema de conservación de la energia, las leyes de newton y el teorema del trabajo y la energia cuando tenemos fuerzas no conservativas.

Energia en el punto A

$$E_A = \mathrm{U}_g + \mathrm{K} = mgh + \frac{1}{2}mv_A^2$$

Como la masa se suelta del reposo, luego su energia cinetica es cero.

$$E_A = mgh$$

Energia en la base del plano inclinado.

$$E_{base} = \mathrm{U}_g + \mathrm{K} = mgh + \frac{1}{2}mv_{base}^2$$

Como esta en la base la altura es cero, luego la energia potencial gravitacional es cero.

$$E_{base} = \mathrm{U}_g + \mathrm{K}$$

$$E_{base} = \mathrm{K}$$

Como sólo actuan fuerzas conservativas en el trayecto de A hasta la base se cumple que:

$$E_A = E_{base} = K = mgh \ldots\ldots\ldots (1)$$

Es decir, toda la energia potencial se convirtio en energia cinética.

Veamos la Energia en el punto B

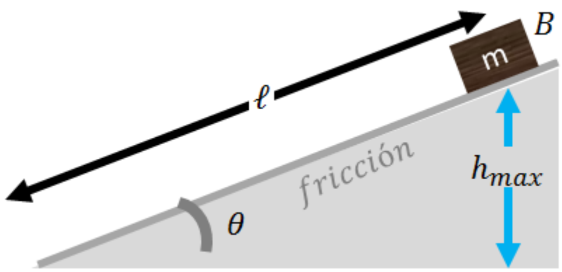
$$E_B = \mathrm{U}_g + \mathrm{K} = mgh_{max} + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Pero en el punto B el bloque se detiene, luego su energia cinetica es cero pues su velocidad es cero.

$$E_B = mgh_{max} \dots \dots \dots \dots \dots (2)$$

¿Qué otra información podemos obtener al ver el sistema?

Es claro que si tenemos la altura y el ángulo del plano podemos calcular la distancia recorrida desde la base hasta donde se detiene.

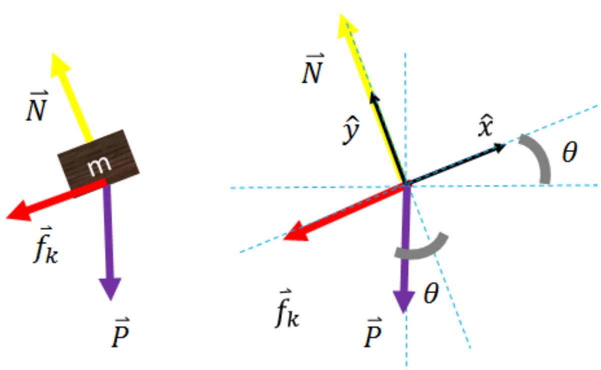


$$\sin\theta = \frac{h_{max}}{\ell}$$

Entonces:

$$\ell = \frac{h_{max}}{\sin\theta}$$

Además, realizando un diagrama de cuerpo libre,



Escribimos la segunda ley de Newton

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_k = m\vec{a}$$

Si descomponemos las fuerzas en el sistema seleccionado:

$$N(\hat{y}) + mg[\cos\theta\,(-\hat{y}) + \sin\theta(-\hat{x})\ ]\ + f_k(-\hat{x}) = ma(\hat{x})$$

Escribimos las ecuaciones escalares,

$$N - mg\cos\theta = 0 \dots \dots .. (3)$$

$$-f_k - mg\sin\theta = ma \dots .. (4)$$

De la ecuación (3)

$$N = mg\cos\theta$$

Y como estamos bajo un regimen cinetico siempre se cumple que:

$$f_k = \mu_k N$$

Asi el módulo de la fuerza de rose es:

$$f_k = \mu_k\, mg \cos\theta \;\ldots\ldots (5)$$

Luego el vector fuerza de rose es un vector con módulo calculado por la ecuacion (5) y con dirección opuesta al movimiento relativo de la caja sobre el plano.

$$\vec{f}_k = \mu_k\, mg \cos\theta\, (-\hat{x}) \;\ldots\ldots..(6)$$

Por otro lado, el trabajo realizado por la fuerza de rose cuando va desde la base hasta el punto B se calcula como:

$$W_{f_k}^{Base\to B} = \int_{Base}^{B} \vec{f}_k \cdot \vec{d}l$$

Sustituyendo el vector fuerza de rose y el diferencial de desplazamiento $\vec{d}l = dx(\hat{x})$

$$W_{f_k}^{Base\to B} = \int_{Base}^{B} \mu_k\, mg \cos\theta\, (-\hat{x}) \cdot dx(\hat{x})$$

Realizamos el producto punto.

$$W_{f_k}^{Base\to B} = \int_{Base}^{B} -\mu_k\, mg \cos\theta\, dx$$

Integramos,

$$W_{f_k}^{Base\to B} = -\mu_k\, mg \cos\theta\, x\Big|_{Base}^{B}$$

Usando el teorema fundamental del cálculo,

$$W_{f_k}^{Base\to B} = -\mu_k\, mg \cos\theta\, (B - Base)$$

Pero

$$(B - Base) = \ell = \frac{h_{max}}{\sin\theta}$$

Asi,

$$W_{f_k}^{Base\to B} = -\mu_k\, mg \cos\theta\, \frac{h_{max}}{\sin\theta}$$

Y,

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

Entonces,

$$W_{f_k}^{Base\to B} = -\mu_k\, mg \cot\theta\, h_{max} \;\ldots\ldots (7)$$

Además, por el teorema del trabajo y la energia con fuerzas no conservativas.

$$W_{NC}^{A\rightarrow B} = \Delta E_{AB}$$

Es decir,

$$W_{f_k}^{base\rightarrow B} = \Delta E_{base,B}$$

Desarrollando,

$$W_{f_k}^{base\rightarrow B} = E_B - E_{base} \dots \dots .. (8)$$

Recordemos que por la ecuación (1), (2) y (7)

$$E_A = E_{base} = mgh \dots \dots \dots (1)$$

$$E_B = mgh_{max} \dots \dots \dots \dots \dots (2)$$

$$W_{f_k}^{Base\rightarrow B} = -\mu_k \, mg \cot\theta \, h_{max} \dots \dots .. (7)$$

Las sustituimos en (8)

$$-\mu_k \, mg \cot\theta \, h_{max} = mgh_{max} - \ mgh$$

Simplificamos, al lado derecho de la ecuación podemos sacar factor común (mg) y cancelarla con la (mg) de la parte izquierda.

$$-\mu_k \, mg \cot\theta \, h_{max} = mg(h_{max} - \ h)$$

$$-\mu_k \cot\theta \, h_{max} = (h_{max} - \ h)$$

Multiplicamos por (-1) a ambos lados de la igualdad.

$$\mu_k \cot\theta \, h_{max} = (h - h_{max})$$

Despejamos μ_k

$$\mu_k = \left(\frac{h - h_{max}}{h_{max} \cot\theta}\right)$$

$$\mu_k = \left(\frac{h}{h_{max}} - 1\right) \tan\theta$$

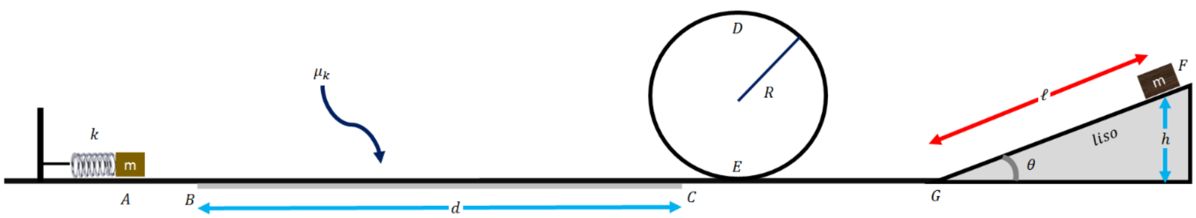
Sustituimos las cantidades núericas

$$\mu_k = \left(\frac{6}{5} - 1\right) \tan 36.9°$$

$$\mu_k = 0.15$$

Problema #59. Considere la siguiente situación. Un bloque de masa (m) se encuentra en la base de un resorte comprimido una distancia desconocida medido desde su longitud natural x_0 en la dirección de una pista horizontal que contiene una zona aspera de distancia d y coeficiente de rose μ_k. Más allá del punto C se encuentra un riso de radio R y un plano inclinado un angulo θ sobre la horizontal.

a) Cuál deberia ser la compresión minima requerida por el resorte si se quiere pasar la zona aspera de la pista. (3 pts)
b) Suponga que puede comprimir un poco más el resorte de manera que logra atravesar la zona aspera. Calcule la minima compresión requerida para que el bloque complete una vuelta sobre el riso. (3 pts)
c) Una vez completo el riso y el bloque llega al punto E. Calcule:
   i) El módulo de la fuerza normal que experimenta el bloque debido a la pista. (1 pts)
   ii) La rápidez del bloque. (1 pts)
   iii) El módulo de la aceleración que experimienta el bloque (1 pts)
d) Calcule la distancia ℓ máxima recorrida por el bloque medido desde la base del plano inclinado (2 pts)
e) ¿Cuál será su velocidad al regresar a la base del plano inclinado en el punto G? (1 pts)



Solución: Este es un ejercicio bastante completo donde combinaremos el teorema del trabajo y la energia, el principio de conservación de la energia y las leyes de newton. Es un ejercicio que recuerda esos jugos tres en uno que nos sube las defensas. Solo que este nos prepara para lo que nos puedan preguntar en un parcial. Buen provecho.

Pregunta 1)

Comenzamos viendo la energia localizada en el punto A

$$E_A = U + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_A^2$$

Como el resorte esta comprimido su energia cinetica es cero, pues no se esta moviendo.

$$E_A = \frac{1}{2}kx^2 \ldots\ldots\ldots (0)$$

Energia en el punto B

$$E_B = E_A = U + K$$

Como la caja en el punto B esta sobre el piso y no hay un resorte en dicho punto toda su energia es cinetica.

Por el principio de conservación de la energia tenemos que:

$$E_A = E_B = K = \frac{1}{2}kx^2 \ldots\ldots (1)$$

Energia en el punto C

$$E_C = K = \frac{1}{2}mv_C^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Es claro que durante el trayecto de B a C actuo una fuerza no conservatica, en este caso el rose.

Sabemos que por el teorema del trabajo y la energia: El trabajo de las fuerzas no conservativas en una trayectoria es igual a la variacion de su energia total.

$$W_{NC}^{B \to C} = \Delta E_{BC} \ldots\ldots (3)$$

Calculamos el trabajo realizado por la fuerza no conservativa, en este caso, el rose.

$$W_{NC}^{B \to C} = \int_B^C \vec{f_r} \cdot \vec{dr} \ldots\ldots (4)$$

Donde,

$$\vec{f_r} = \mu_k mg(-\hat{x}) \ldots\ldots (5)$$

Y,

$$\vec{dr} = dx(\hat{x}) \ldots\ldots (6)$$

La ecuación (5) y (6) se obtienen al elegir un sistema de referencia con origen en el punto B y dirección $\hat{x}$ positiva en dirección del desplazamiento del bloque. Además de la aplicación directa de la segunda ley de newton y el conocimiento de que el modulo de la fuerza de rose en un regimen cinetico es $f_k = \mu_k N$.

Sustituyendo (5) y (6) en (4)

$$W_{NC}^{B \to C} = \int_B^C \mu_k mg(-\hat{x})_r \cdot dx(\hat{x})$$

Realizamos el producto punto.

$$W_{NC}^{B \to C} = \int_B^C -\mu_k mg\, dx$$

Integramos,

$$W_{NC}^{B \to C} = -\mu_k mgx|_B^C$$

Usando el teorema fundamental del caluculo,

$$W_{NC}^{B\to C} = -\mu_k mg(C - B)$$

Pero, $(C - B) = d$

Entonces,

$$W_{NC}^{B\to C} = -\mu_k mgd \dots\dots (7)$$

Sustituimos (7) (1) y (3) en la ecuación (3)

$$W_{NC}^{B\to C} = \Delta E_{BC}$$

$$-\mu_k mgd = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}kx^2 \dots\dots (8)$$

Luego la condición para que pase la zona aspera con la minima compresión se obtiene al llegar al punto C con velocidad cero. Es decir que llegue de vaina ps.

Condición.

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = 0$$

$$-\mu_k mgd = -\frac{1}{2}k{x_{min}}^2$$

Despejamos la variable a conseguir.

$$\frac{2\mu_k mgd}{k} = {x_{min}}^2$$

$$|x_{min}| = \sqrt{\frac{2\mu_k mgd}{k}}$$

Pregunta b)

Cosideremos ahora el tramo de la pista que une los puntos C y D. Es claro que si podemos comprimir aun más el resorte entonces existe $x > x_{min}$ calculado en el punto anterior.

Con eso en mente vemos la energia en el punto C

$$E_C = K = \frac{1}{2}mv_C^2$$

Es claro que es solo energia cinetica, pues no hay resorte y esta sobre el piso.

Luego por la ecuación (8) despejamos.

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}kx^2 - \mu_k mgd \dots\dots (9)$$

Ahora vemos la energia en el punto D

$$E_D = U + K = mg2R + \frac{1}{2}mv_D^2 \dots\dots (10)$$

Por el teorema de conservación de la energia tenemos que:

$$E_C = E_D$$

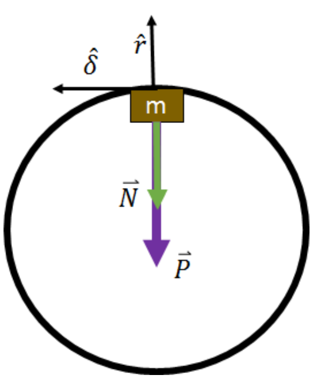
Entonces,

$$\frac{1}{2}kx^2 - \mu_k mgd = mg2R + \frac{1}{2}mv_D^2 \dots\dots.(11)$$

Aquí nos conseguimos con una seria dificultad. Tenemos una ecuación y dos incognitas en principio, ya que x es la variable a conseguir y no conocemos la velocidad en el punto D. Además, esta no puede ser cero porque. Primero, si la velocidad en D es cero nuestro sentido común nos dice “el bloque caeria inmediatamente sin completar el riso” cosa que no queremos. Segundo, no existe posibilidad fisica de que el bloque llegue al punto D con velocidad cero, este abandonaria la pista antes de alcanzar el punto D. ¿Entiendes por qué? De no ser así, recomendamos aclarar esta duda con el profesor en consulta y hacer un repaso sobre el movimiento circular.

¿Qué hacemos entonces?

Entregar el parcial hahaha, no! Nos acordamos de Newton. Realicemos un diagrama de cuerpo libre en ese punto D tan particular y veamos que información podemos sacar.



Escribimos la segunda ley de newton.

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Descomponemos los vectores según el sistema seleccionado.

$$N(-\hat{r}) + mg(-\hat{r}) = ma_c(-\hat{r})$$

Escribimos las ecuaciones escalares.

$$-N - mg = -ma_c$$

Multiplicando toda le ecuación por -1 y sustituyendo el valor de la aceleración centripeta.

$$N + mg = m\frac{v_D^2}{R} \dots\dots\dots (12)$$

La ecuacíon (12), dicho de paso, describe la ecuación del movimiento para el bloque justo en el punto D. Depende de la fuerza normal, su masa, la gravedad, el radio del circulo y la rápidez. Es claro que para hallar la condición que buscamos el bloque debe llegar al punto D con velocidad, no podemos hacer la masa cero pues nos quedamos sin bloque, la fuerza de gravedad no depende de nosotros, tampoco la podemos hacer cero, y si quitamos el radio nos quedamos sin riso. La elegida para ser cero es la fuerza normal que hace la pista sobre el bloque.

Asi, la condición de velocidad minima requerida para poder realizar el riso se da cuando.

$$N = 0$$

Por tanto, la ecuacion (12) queda:

$$mg = m\frac{v_D^2}{R}$$

De donde,

$$v_{D_{min}}^2 = gR \ldots\ldots (13)$$

Sustituyendo la ecuación (13) en (11)

$$\frac{1}{2}kx^2 - \mu_k mgd = mg2R + \frac{1}{2}mgR$$

Despejamos la incognita que buscamos

$$\frac{1}{2}kx^2 = \mu_k mgd + mg2R + \frac{1}{2}mgR$$

$$kx^2 = 2\mu_k mgd + 4mgR + mgR$$

$$x^2 = \frac{2\mu_k mgd + 5mgR}{k}$$

$$|x| = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)(2d\mu_k + 5R)}$$

Pregunta c) Nos piden calcular el modulo de la fuerza normal en el punto E

$$E_D = mg2R + \frac{1}{2}mv_D^2 = mg2R + \frac{1}{2}mgR = \frac{5}{2}mgR \ldots\ldots (14)$$

$$E_E = \frac{1}{2}mv_E^2 \ldots\ldots (15)$$

Por conservación de la energia.

$$E_D = E_E$$

Entonces,

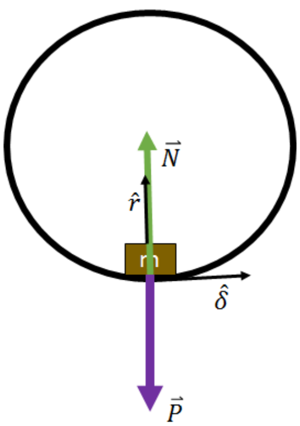
$$\frac{5}{2}mgR = \frac{1}{2}mv_E^2$$

De donde obtenemos que la rapidez en el punto E

$$5gR = v_E^2$$

$$v_E = \pm\sqrt{5gR}$$

Realizamos un diagrama de cuerpo libre en el punto E



Escribimos la segunda ley de newton

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Descomponemos las fuerzas según nuestro sistema de referencia.

$$N(\hat{r}) + mg(-\hat{r}) = ma_c(\hat{r})$$

Escribimos las ecuaciones escalares.

$$N - mg = m\frac{v_E^2}{R}$$

Despejamos la fuerza normal

$$N = mg + m\frac{v_E^2}{R}$$

Sustituimos el valor de la rapidez en el punto E

$$N = mg + m\frac{5gR}{R}$$

Simplificamos,

$$N = mg + 5mg$$

$$N = 6mg$$

Para hallar la aceleración que experimenta el bloque recordamos que:

$$a_c = \frac{v_E^2}{R}$$

Sustituimos el valor de la rapidez.

$$a_c = \frac{5gR}{R}$$

Simplificamos,

$$a_c = 5g$$

Pregunta d) Vemos la energia en el punto E.

$$E_E = \frac{1}{2}mv_E^2 = \frac{5}{2}mgR$$

Vemos la energia en la base del plano inclinado, es decir en el punto G.

$$E_G = K$$

Luego por conservación de la energia.

$$E_E = E_G = K = \frac{5}{2}mgR \dots \dots (16)$$

Vemos la energia en el punto F, hasta donde se supone que se detiene el bloque.

$$E_F = U + K = mgh + \frac{1}{2}mv_F^2 \dots \dots (17)$$

Por conservación de la energia.

$$E_G = E_F$$

Etnonces,

$$\frac{5}{2}mgR = mgh + \frac{1}{2}mv_F^2$$

La condición para que el bloque alcanse la distancia maxima en el plano inclinado se da cuando su velocidad en el punto más alto es cero.

Asi,

$$\frac{5}{2}mgR = mgh$$

De donde obtenemos que:

$$h = \frac{5}{2}R \dots \dots (18)$$

Pero queremos es la distancia ℓ recorrida.

$$\sin\theta = \frac{h}{\ell}$$

De donde,

$$\ell = \frac{h}{\sin\theta}$$

Sustituimos el valor de h

$$\ell = \frac{\frac{5}{2}R}{\sin\theta}$$

Simplificamos,

$$\ell = \frac{5R}{2\sin\theta}$$

Pregunta e)

$$E_F = U + K = mgh + \frac{1}{2}mv_F^2$$

Pero,

$$h = \frac{5}{2}R$$

Sustituyendo,

$$E_F = U + K = \frac{5}{2}mgR + \frac{1}{2}mv_F^2$$

Y como parte de F del reposo,

$$E_F = \frac{5}{2}mgR \dots \dots (19)$$

Vemos la energia en G

$$E_G = \frac{1}{2}mv_G^2$$

Por el teorema de conservación de la energia.

$$E_G = E_F$$

Entonces,

$$\frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{5}{2}mgR$$

De donde,

$$v_G^2 = 5gR$$

Sacando raiz cuadrada.

$$v_G = \pm\sqrt{5gR}$$

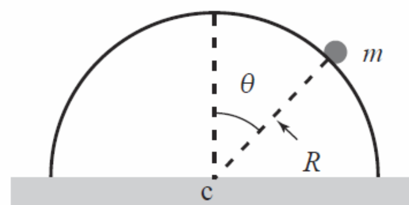
Nota: curioso que la velocidad en el punto G es la misma que en el punto E aún después de subir por un plano inclinado. No deberia de sorprernder el plano no tiene roce, luego la energia se conserva.

Problema #60

151. Sobre una semiesfera lisa y de radio R resbala una partícula de masa m. La partícula parte del punto más alto de la semiesfera con una rapidez angular w_0.

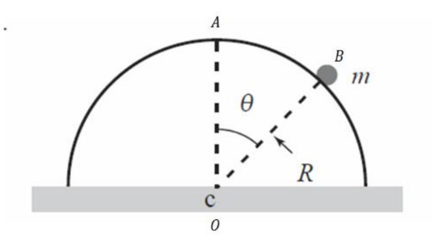
a. Cuando la línea entre el centro c de la esfera y la partícula forma un ángulo θ con la vertical (ver figura) halle: la rapidez angular w y el módulo N de la normal.

b. ¿Para qué valor de $\cos(\theta)$ la partícula abandona la semiesfera?



c. Ahora se quiere que la partícula salga disparada horizontalmente desde el punto mas alto de la semiesfera sin que tenga oportunidad de resbalar. ¿Cuál es la menor velocidad angular w_0 que debe tener?

Solución Parte A) Llamamos A el punto más alto de la semiesfera. B el punto donde llega la masa m y O el origen desde donde mediremos todas las alturas.



Vemos la Energia en el punto A

$$E_A = U + K =, mgR + \frac{1}{2}mv_A^2$$

Vemos la Energia en el punto B

$$E_B = U + K = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Nota importante: En este ejercicio sólo hace trabajo el peso ya que no hay rose con la pista. Sabemos que la energia potencial graviacional es $U_g = mgh$

Donde h siempre es medida respecto a un observador que nosotros podemos definir. En este caso se definio en el punto C. Asi, es claro que la altura h en el punto A de la masa es R (el radio de la semisircunferencia). Y para el punto B la altura h es $R\cos\theta$,es decir, la proyección de R sobre el eje del radio vertical.

Por conservación de la Energia.

$$E_A = E_B$$

Es decir,

$$mgR + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv_B^2 \dots\dots(1)$$

Sabemos que,

$$V = R\omega \dots\dots(2)$$

Sustituimos (2) en (1)

$$mgR + \frac{1}{2}m(R\omega_A)^2 = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m(R\omega_B)^2$$

Además, el enunciado nos informa que la rapidez angular en A es ω_0

Sustituimos,

$$mgR + \frac{1}{2}m(R\omega_0)^2 = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m(R\omega_B)^2$$

Despejamos la rapidez angular en B. Multiplicamos toda la ecuación por 2

$$2mgR + mR^2\omega_0^2 = 2mgR\cos\theta + mR^2\omega_B^2$$

Restamos 2mgRcosθ a ambos lados de la igualdad.

$$2mgR - 2mgR\cos\theta + mR^2\omega_0^2 = mR^2\omega_B^2$$

Dividimos toda la ecuación por mR^2

$$\frac{2mgR - 2mgR\cos\theta + mR^2\omega_0^2}{mR^2} = \frac{mR^2\omega_B^2}{mR^2}$$

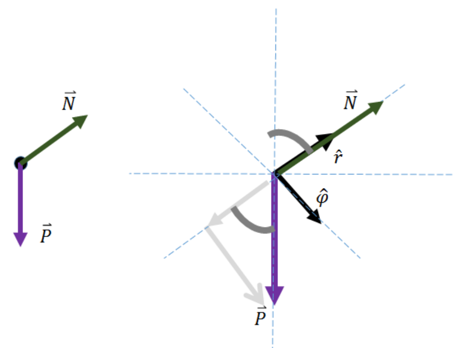
Simplificamos,

$$\frac{2g(1-\cos\theta)}{R}+\omega_0^2=\omega_B^2$$

Sacamos Raiz cuadrada a ambos lados de la idualdad.

$$\sqrt{\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)+\omega_0^2}=|\omega_B|$$

Realizamos un diagrama de cuerpo libre en el punto B



Escribimos las segunda ley de newton.

$$\vec{N}+\vec{P}=m\vec{a}$$

Descomponemos las fuerzas en las direcciones tangenciales y radiales,

$$N(\hat{r})+mg(\cos\theta(-\hat{r})+\sin\theta(\hat{\varphi})\ )=m\big(a_c(-\hat{r})+a_t(\hat{\varphi})\big)$$

Escribimos las ecuacines escalares,

$$N-mg\cos\theta=-ma_c\ \ldots..(3)$$

$$mg\sin\theta=ma_t\ \ldots\ldots(4)$$

De la ecuación (3) sustituimos el vamor de $a_c=R\omega_B^2$ y despejamos el valor de fuerza normal.

$$N=mg\cos\theta-mR\omega_B^2\ \ldots.(5)$$

Luego, ω_B la calculamos en el punto anterior, lo sustituimos en (5) y simplificamos:

$$N=mg\cos\theta-mR\left(\omega_0^2+\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)\right)$$

Propiedad distribuitiva,

$$N=mg\cos\theta-mR\omega_0^2+2mg\cos\theta-2mg$$

Simplificamos,

$$N=3mg\cos\theta-2mg-mR\omega_0^2$$

Agrupamos terminos semejantes

$$N=mg(3\cos\theta-2)-mR\omega_0^2\ \ldots\ldots..(6)$$

Solución parte B) La condición para que la particula abandonde la semiesfera ocurre cuando esta pierda contacto con la superficie, es decir, $N = 0$

Asi, por la ecuacion (6)

$$0 = mg(3\cos\theta - 2) - mR\omega_0^2$$

Sumamos a ambos lados $mR\omega_0^2$,

$$mR\omega_0^2 = mg(3\cos\theta - 2)$$

Dividivimos por mg toda la ecuación,

$$\frac{R\omega_0^2}{g} = 3\cos\theta - 2$$

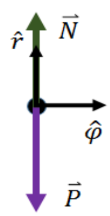
Sumamos 2 a ambos lados,

$$\frac{R\omega_0^2}{g} + 2 = 3\cos\theta$$

Dividimos por 3 toda la ecuación,

$$\frac{R\omega_0^2}{3g} + \frac{2}{3} = \cos\theta$$

Parte C) Realizamos un diagrama de cuerpo libre en el punto A



Escribimos la segunda ley de newton

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Descomponemos los vectores,

$$N(\hat{r}) + mg(-\hat{r}) = ma_c(-\hat{r})$$

Escribimos la ecución escalar y sustituimos el vamor de $a_c = R\omega_A^2$

$$N - mg = -mR\omega_0^2 \dots\dots (7)$$

De nuevo la condición para que la particula abandonde la semiesfera ocurre cuando esta pierda contacto con la superficie, es decir, $N = 0$

Así, por la ecuación (7)

$$-mg = -mR\omega_0^2$$

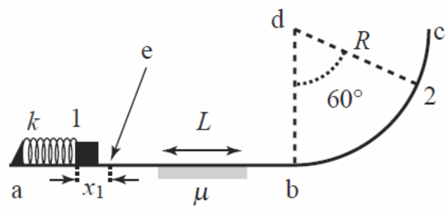
Despejamos ω_0

$$|\omega_0| = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Problema #61

153. La figura muestra una pista compuesta de dos tramos y que se encuentra en un plano vertical. El tramo ab es recto y horizontal y el tramo bc tiene forma de 1/4 de circunferencia de radio $R = 5$ m y centro en el punto d. La pista es lisa a excepción de un trozo en el tramo recto de longitud L desconocida, siendo $\mu = 7/10$ el coeficiente de roce dinámico. En un extremo de la pista hay un resorte de constante elástica $k = 800$ N/m, el punto e es el punto de equilibrio del resorte.

Una partícula de masa $m = 2$ kg parte del reposo en el punto 1 donde se encuentra comprimiendo el resorte una longitud de $x_1 = 4/10$ m. La partícula no está unida al resorte, llega hasta el punto 2 y luego regresa.

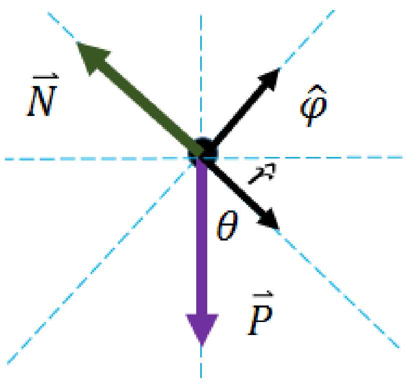


a. Halle el módulo de la fuerza normal debida a la pista en el punto 2.

b. Halle la longitud L.

c. Al regreso la partícula comprime nuevamente el resorte. Halle la nueva compresión máxima del resorte.

Solución parte A) Realizamos un diagrama de cuerpo libre en el punto 2.



Escribimos la segunda ley de newton.

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Descomponemos los vectores,

$$N(-\hat{r}) + mg(\cos\theta(\hat{r}) + \sin\theta(-\hat{\varphi})) = m(a_c(-\hat{r}) + a_t(\hat{\varphi}))$$

Escribimos las ecuaciones escalares,

$$mg\cos\theta - N = -m\frac{v_2^2}{R}$$

Pero, la velocidad en el punto 2 es cero, ya que la particula se regresa alli,

$$mg\cos\theta - N = 0$$

De donde,

$$N = mg\cos\theta$$

Sustituyendo las candidades númericas,

$$N = 2kg * 10\left(\frac{m}{s^2}\right)\cos 60°$$

$$N = 10\text{N}$$

Solución parte b) Usaremos el teorema del trabajo y la energia.

Energia en el punto (1)

$$E_1 = U + K = \frac{1}{2}k(x_1)^2 + \frac{1}{2}v_1^2$$

Pero en en el punto punto el resorte esta comprimido y aun no se ha movido, luego su velocidad es cero,

$$E_1 = \frac{1}{2}k(x_1)^2 \ldots\ldots..(1)$$

Energia en el punto (2)

$$E_2 = U + K = mgh + \frac{1}{2}v_2^2$$

Pero la velocidad en el punto (2) es cero, Además $h = R - R\cos\theta$

Asi,

$$E_2 = mgR(1-\cos\theta) \ldots\ldots.(2)$$

Entre el punto 1 y 2 hay un zona áspera de longitud L

Hallamas el trabajo realizado por la fuerza de rose,

$$W_{\vec{f}}^{0\to L} = \int_0^L \mu_k mg(-\hat{x}) \cdot dx(\hat{x})$$

Realizamos el producto punto,

$$W_{\vec{f}}^{0\to L} = \int_0^L -\mu_k mg dx$$

Integramos,

$$W_{\vec{f}}^{0\to L} = -\mu_k mgx|_0^L$$

Usamos el teorema fundamental del calculo,

$$W_{\vec{f}}^{0\to L} = -\mu_k mgL \ldots\ldots.(3)$$

Por el teorema del trabajo y la energia. El trabajo hecho por las fuerzas no conservativas entre dos puntos 1 y 2 es igual a la variacion de la energia entre dichos puntos,

$$W_{NC}^{1\to 2} = \Delta E_{12}$$

Es decir,

$$W_{NC}^{1\to 2} = E_2 - E_1 \ldots..(4)$$

Sustituimos los resultados de las ecuaciones (1) (2) y (3) en (4)

$$-\mu_k mgL = mgR(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}k(x_1)^2$$

Despejamos L, teorema malandro al lado izquierdo de la ecuación.

$$-\mu_k mgL = \frac{2mgR(1-\cos\theta) - k(x_1)^2}{2}$$

Dividimos toda la ecuación por $-\mu_k mg$

$$L = \frac{2mgR(\cos\theta - 1) + k(x_1)^2}{2\mu_k mg}$$

Sustituimos las cantidades númericas,

$$L = \left\{ \frac{[2 * 2(kg) * 5(m) * (\cos 60° - 1)] + \left[800\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right) * \left(\frac{4}{10}(m)\right)^2\right]}{\left[2 * \frac{7}{10} * 2(kg) * 10\left(\frac{m}{s^2}\right)\right]} \right\}$$

Usted coloca todo eso en la calculadora y:

$$L = 1(\mathrm{m})$$

Solución parte c) Usaremos el teorema del trabajo y la energia. Pero ahora en el sentido de 2 a 1 y ya conocido la distancia L

Energia en el punto 2

$$E_2 = U + K = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Pero en el punto 2 su velocidad es cero,

$$E_2 = mgR(1-\cos\theta) \ldots\ldots (5)$$

Energia en el punto x_{max} de compresión del resorte

$$E_{x_{max}} = U + K = \frac{1}{2}k(x_{\max})^2 + \frac{1}{2}mv_{x_{max}}^2$$

Pero en el punto de compresión maxima del resorte la velocidad de la particula es cero,

$$E_{x_{max}} = \frac{1}{2}k(x_{\max})^2 \ldots\ldots(6)$$

Además, en el trayecto 2 a 1 tambien actua la fuerza de rose. Cuyo trabajo lo habiamos calculado antes por la ecuación (3)

$$W_{\vec{f}}^{0\to L} = -\mu_k mgL$$

Sustituyendo el valor de L

$$W_{\vec{f}}^{0\to L} = -\mu_k mg\,\frac{2mgR(\cos\theta - 1) + k(x_1)^2}{2\mu_k mg}$$

Simplificando,

$$W_{\vec{f}}^{0\to L} = \frac{2mgR(1-\cos\theta) - k(x_1)^2}{2} \ldots\ldots(7)$$

Por el teorema del trabajo y la energia. El trabajo hecho por las fuerzas no conservativas entre dos puntos 1 y 2 es igual a la variacion de la energia entre dichos puntos,

$$W_{NC}^{2\to 1} = \Delta E_{2x_{max}}$$

Es decir,

$$W_{NC}^{1\to 2} = E_{x_{max}} - E_2 \ldots\ldots(8)$$

Sustituimos los resultados de las ecuaciones (5) (6) y (7) en (8)

$$\frac{2mgR(1-\cos\theta) - k(x_1)^2}{2} = \frac{1}{2}k(x_{\max})^2 - \ mgR(1-\cos\theta)$$

Despejamos $(x_{\max})$ multiplicamos toda la ecuación por 2 y sumanos $mgR(1-\cos\theta)$ a ambos lados.

$$2mgR(1-\cos\theta) + 2mgR(1-\cos\theta) - k(x_1)^2 = k(x_{\max})^2$$

Simplificamos, y dividimos toda la ecuación por k

$$\frac{4mgR(1-\cos\theta) - k(x_1)^2}{k} = (x_{\max})^2$$

Sacamos raiz cuadrara a amabos lados de la ecuación.

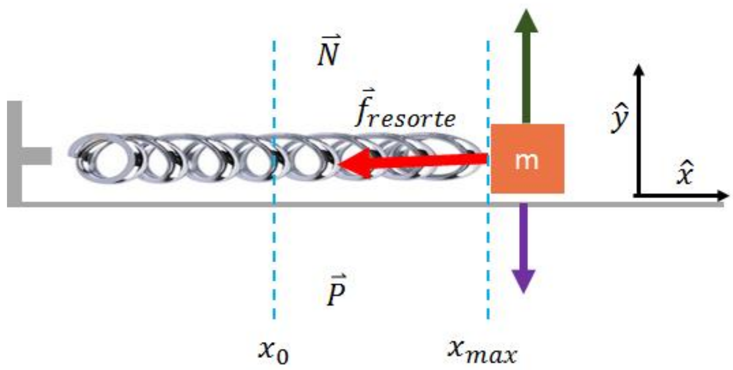
$$\sqrt{\frac{4mgR(1-\cos\theta) - k(x_1)^2}{k}} = |x_{max}|$$

Nota: Se deja por hacer la sustitución de las cantidades númericas y la verificación de la expresión algebraica hallada.

Problema #62

Deducción de la "formula" que describe el movimiento armónico simple para un sistema masa resorte.

Solución. Considere el siguiente sistema masa-resorte bajo el supuesto de fricción nula. Suponga conocido la constante k del resorte y la masa m. Suponga que en el instante de tiempo cero el resorte esta estirado su elongación máxima $x(t = 0s) = x_{max}$. Se suelta la masa y observamos el movimiento.



Escribimos la segunda ley de Newton.

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_{re} = m\vec{a}$$

Descomponemos los vectores,

$$N(\hat{y}) + mg(-\hat{y}) - kx(\hat{x}) = ma(\hat{x})$$

Escribimos las ecuaciones escaleres.

$$N - mg = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$-kx = ma \ldots\ldots (2)$$

Sabemos que,

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \ldots\ldots (3)$$

Sustituimos (3) en (2)

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Dividimos toda la ecuación entre m

$$-\frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Sumamos a ambos lados de la igualdad $\frac{k}{m}x$

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x$$

Reacomodadmos,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \dots\dots (3)$$

La expresión (3) es una ecuación diferencial homogenea de orden 2. Aunque quizas le resulte una ecuación muy dificil de resolver, en matemáticas IV usted aprenderá técnicas de resolución para este tipo de expresiones. No pretendo crear en usted angustia alguna, más bien esta dirigida aquellos estudiantes que como yo no resisten la idea de aprenderse una fórmula porque sí. No es necesario que en el tiempo que lee esta guía entienda al detalle la solución que aquí presentamos, más bien tomela como una visión de futuro sobre los conocimientos que pronto adquirirá.

Observe que la expresión $\frac{k}{m}$ es una expresión que depende de dos constantes, la masa (m) y la constante del resorte (k)

Luego, cualquier operación entre dos constantes da como resultado otra constante.

Llamamos,

$$\frac{k}{m} = \omega$$

Asi, la expresión (3) se puede escribir como,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0 \dots\dots (4)$$

Siempre me ha parecido correcto que nos enseñen a leer matemáticas, pues es un lenguaje como cualquier otro, lamentablemente esto es algo que pocos profesores hacen, y más pocos son aquellos estudiantes que si quiera son concientes que las matematicas son un lenguaje. Esta expresión esta diciendo. **Halle una función que cuando la derive dos veces con respecto al tiempo y le sume la misma función multiplicada por una constante llamada omega de como resultado cero.** Sí, la solución de ecuaciones diferenciales dan como resultado una o varias funciónes.

Ahora bien, más adelante usted aprenderá que es posible definir un operador diferencial, como el operador suma (+), resta(-) raiz (√.), etc. que "ejecuta" una tranformación, en este caso lineal, de una función. Es una cuestión de notación que considera una diferenciación como una operación abtracta que acepta una función y nos regresa otra.

Notación,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = D_x^2$$

Es decir con esta nueva notación es posible escribir la expresión (4) como:

$$D^2x + \omega x = 0$$

Factor común x

$$x(D^2 + \omega) = 0$$

Ahora, para todo $x \neq 0$ dividimos entre x la ecuación. Es decir, condicionamos el problema diciendole que "deseche" la solución trivial $x = 0$. Pues la función $x(t) = 0$ no aporta mucha información al problema. Nos queda la siguiente expresión.

$$(D^2 + \omega) = 0 \ldots \ldots (5)$$

La expresión (5) se denomina Ecuación Caracteristica o Ecuación Auxiliar asociada a la ecuación diferencial.

Las soluciones de este tipo de ecuaciónes, por motivos que usted aprenderás más adelante, son de la forma:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{r_1 t} \\ x_2(t) = e^{r_2 t} \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Y tendrá tantas soluciones como grado de derivada tenga la ecuación diferencial. En este caso como es de grado dos, se considerán dos soluciones. e es la función exponencial, $r_1 y\, r_2$ son las raices de la ecuación caracteristica y t es el parámetro respecto al cual hemos derivado.

Hallamos las raices de la ecuación (5)

$$D^2 = -\omega$$

$$D = \pm\sqrt{-\omega} = \pm\sqrt{-1}\omega$$

$\sqrt{-1} = i$, la unidad imaginaria.

$$D = \pm i\omega$$

Asi,

$$r_1 = +i\omega \text{ y } r_2 = -i\omega$$

Sustituimos en (6)

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{i\omega t} \\ x_2(t) = e^{-i\omega t} \end{cases}$$

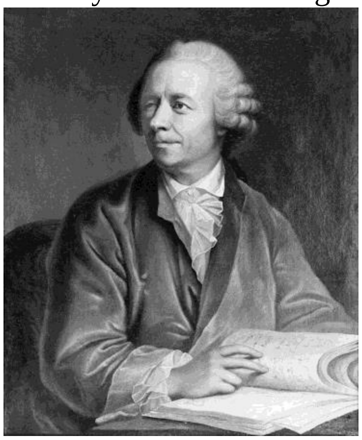
Las expresiones de arriba son las soluciones particulares de la ecuación diferencial. Y si, ambas soluciones pertencen a los números complemos $\mathbb{C}$.

Sin embargo, mediante el uso de una ecuación podemos "sacar" información real de dichas expresiones y generalizar la solucion.

Dicha ecuaciones es llamada Ecuación de Euler y se presenta a continuación.

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Leonhard Euler, fue un matemático y físico suizo. Se trata del principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos.



Vivió en Rusia y Alemania la mayor parte de su vida y realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos. También introdujo gran parte de la moderna terminología y notación matemática, particularmente para el área del análisis matemático, como por ejemplo la noción de función matemática. Así mismo se le conoce por sus trabajos en los campos de la mecánica, óptica y astronomía.

Una afirmación atribuida a Pierre Simón Laplace expresa la influencia de Euler en los matemáticos posteriores: «Lean a Euler, lean a Euler, él es el maestro de todos »

Tomamos una de las soluciones particulares por ejemplo la solución $x_1(t) = e^{i\omega t}$

La empresamos en terminos de la ecuación de Euler.

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

De aquí se observa que:

$\cos\omega t$ es la parte real de la ecuación.

$i\sin\omega t$ es la parte imaginaria de la ecuación.

Finalmente la solución general viene dada por la suma de las soluciones particulares más dos constantes arbitrarias.

$$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2 i\sin\omega t$$

Luego,

$$c_1 = A$$

$$c_2 i = B$$

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \ldots\ldots..(7)$$

$A\ y\ B$ son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales de cada problema.

En ocaciones es útil expresar la ecuación (7) en una forma más compacta.

Considere la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Llamemos,

$$\alpha = \omega t$$

$$\cos(\omega t+\beta) = \cos\omega t\cos\beta - \sin\omega t\sin\beta \ldots\ldots (8)$$

Multiplicamos por una constante C a ambos lados de la ecuación (8)

$$\mathrm{C}\cos(\omega t+\beta) = C\cos\beta\cos\omega t - C\sin\beta\sin\omega t$$

Llamamos

$$A = C\cos\beta$$

$$B = -C\sin\beta$$

$$\mathrm{C}\cos(\omega t+\beta) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Ambas expresiones son equivalentes. Sin embargo, será muy común usar la expresión de la izquierda para realizar ejercicios. De nuevo, $C\ y\ \beta$ son constantes fijadas por las condiciones iniciales del problema.

$$C = Amplitud\ del\ movimiento\ armónico\ simple.$$

$$\beta = fase\ del\ movimiento\ armónico\ simple.$$

Nota importante.

Las ecuaciones mostradas deben ser aprendidas como “formulas” cuando estemos resolviendo ejercicios que involucren moviento armónico simple.

Las recordamos a continuación.

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$x(t) = C\cos(\omega t+\beta)$$

Para terminar veamos lo siguiente. Hemos conseguido como solución a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\ldots\ldots(8)$$

La función,

$$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

Entonces derivemos dos veces respeto al tiempo y sustituyamos en la ecuación. Observemos lo que sucede.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$$

$$\frac{d^1}{dt^1}(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)$$

$$\frac{d^0}{dt^0}(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t)$$

Sustituimos en (8)

$$(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t)+\frac{k}{m}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)=0$$

$$-\omega^2(A\cos\omega t+B\sin\omega t)+\frac{k}{m}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)=0$$

$$\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)(A\cos\omega t+B\sin\omega t)=0\quad\ldots\ldots(9)$$

Como $x(t)\neq 0$ **entonces** $\boldsymbol{x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t}$ **será solución** de la ecuación diferencial si,

$$\frac{k}{m}-\omega^2=0$$

Es decir,

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

El parametro ω esta fijado por la raiz cuadrada del cociente entre la constante de elasticidad k del resorte y la masa m de la particula.

Problema #63

159. Una partícula realiza un movimiento armónico simple unidimensional tal que su posición en función del tiempo es $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$. Si $x(0) = A/2$ y $\dot{x}(0) > 0$ entonces su fase inicial es

A) distinta a las otras 4 opciones.

B) $\delta = +\pi/6$

C) $\delta = +\pi/3$

D) $\delta = -\pi/6$

E) $\delta = -\pi/3$

Solución.

Condiciones iniciales,

$$x(0) = \frac{A}{2} \qquad y \qquad \dot{x}(0) > 0$$

Derivamos $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

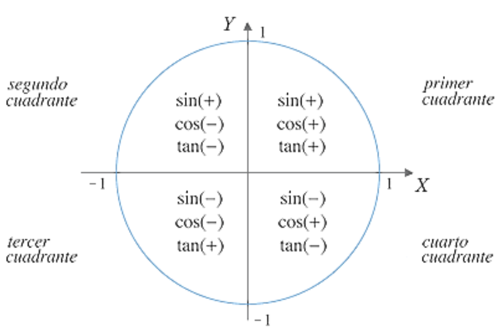
Con $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ podemos armar el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \frac{A}{2} = \text{A}\cos\delta \ \Rightarrow \cos\delta = \frac{1}{2} \\ -A\omega\sin\delta > 0 \ \Rightarrow \sin\delta < 0 \end{cases}$$

Nos hacemos la pregunta ¿cuál es en ángulo cuyo coseno nos da como resultado $\frac{1}{2}$?

Es claro que la respuesta es $\frac{\pi}{3}$ o $\frac{5\pi}{3}$, cual escojemos entonces. La cuestión es que necesitamos que el $\sin\delta < 0$, es decir, necesitamos que sea negativo para que al máltiplicar por $-A\omega$ la velocidad sea positiva.

Es preciso entonces recordar los signos que toman las funciones seno, coseno y tangente en el circulo unitario



<u>Regla mnemotécnica para el aprendizaje de los signos según cada cuadrante.</u>

Primer cuadrante: todos son positivos.

Segundo cuadrande: Segundo comienza con “S” de Seno, asi todos son negativos menos el seno.

Tercer cuadrante: Tercer comienza con “T” de tangente, asi todos son negativos menos la tangente.

Cuarto cuadrante: ¿Tienes la idea no?

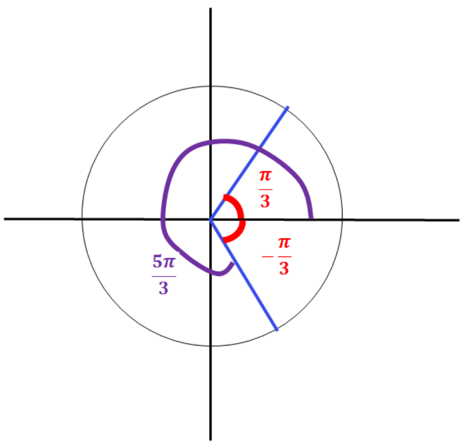
Entonces, haciendo uso de la regla se aprecia que en el cuarto cuadrante el

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Además se cumple que:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) < 0$$

Gráficamente se veria algo asi,



Donde, $\frac{5\pi}{3}$ es medido en sentido antihorario a las manesillas del reloj.

Pero,

$$\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

Si medimos el angulo en sentido horario. Es decir por debajo del eje horizontal y no por encima como estamos acostumbrados.

Finalmente,

$$\delta = -\frac{\pi}{3}$$

Problema #64

162. La posición de una partícula que realiza un movimiento armónico simple unidimensional, viene dada por la expresión $x = A\,\text{sen}(wt)$. En el instante $t = 3/8$ del período se cumple que

A) $x = +A\sqrt{2}/2$ y $\dot{x} > 0$.

B) $x = -A\sqrt{2}/2$ y $\dot{x} < 0$.

C) $x = -A\sqrt{2}/2$ y $\dot{x} > 0$.

D) $x = +A\sqrt{2}/2$ y $\dot{x} < 0$.

E) ninguna de las otras 4 opciones es correcta.

Solución

Sabemos por el enunciado que la particula realiza un MAS dado por la expresión

$$x(t) = A\sin(\omega t) \dots\dots..(1)$$

Derivamos,

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) \dots\dots\dots.(2)$$

Recordemos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{\text{T}} \dots\dots.(3)$$

Sustituimos (3) en (2) y (1)

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\text{T}}t\right) \dots\dots..(4)$$

$$\dot{x}(t) = A\frac{2\pi}{\text{T}}\cos\left(\frac{2\pi}{\text{T}}t\right) \dots..(5)$$

Nos piden que evaluemos en,

$$t = \frac{3}{8}\text{T} \dots\dots(6)$$

Sustituimos (6) en (4) y (5)

$$x\left(\frac{3}{8}\text{T}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\text{T}}\frac{3}{8}\text{T}\right)$$

$$\dot{x}\left(\frac{3}{8}\text{T}\right) = A\frac{2\pi}{\text{T}}\cos\left(\frac{2\pi}{\text{T}}\frac{3}{8}\text{T}\right)$$

Desarrollamos,

$$x\left(\frac{3}{8}\mathrm{T}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\frac{3}{8}\mathrm{T}\right)$$

$$x\left(\frac{3}{8}\mathrm{T}\right) = A\sin\left(\frac{6\pi}{8}\right) = A\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Por otro lado,

$$\dot{x}\left(\frac{3}{8}\mathrm{T}\right) = A\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = A\frac{2\pi}{\mathrm{T}} * \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Es decir,

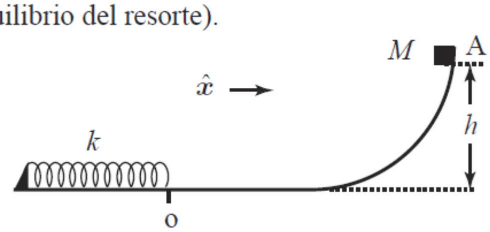
$$\dot{x}(t) < 0$$

Problema #65

173. La pista de la figura es lisa, en su porción horizontal tiene un resorte de constante elástica k con un extremo libre y un extremo fijo a una pared. Desde un punto A situado a una altura h parte del reposo un pequeño bloque de masa M. Cuando el bloque toca el resorte queda adherido al mismo y comienza a oscilar. Tome como instante $t = 0$ el momento de la colisión con el resorte y como origen de coordenadas el punto o (punto de equilibrio del resorte).

a. Halle la posición $x(t)$ del bloque para $t \geq 0$.

b. Encuentre los vectores posición y velocidad del bloque para el instante $t = \tau/3$, donde τ es el período del movimiento oscilatorio.



Solución.

Cuando ocurra la colisión el bloque quedará adherido al resorte y comenzará un MAS. Dicho movimiento es en general de la forma.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

Donde $A, \omega\ y\ \delta$ son constantes a determinar.

Lo más facil es iniciar con el calculo de ω

Ya que omega siempre es de la forma,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Lo segundo más sencillo es calcular la fase. Pues contamos con las condiciones iniciales.

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x} < 0$$

Dichas condiciones iniciales surgen de observar el sistema masa-resorte justo en el instante de la colisión, cuando encendemos nuestro cronometro el bloque esta en la posicion de equilibrio y su velocidad es negativa según el vector direccion $\hat{x}$ del dibujo.

Asi,

$$\begin{cases} 0 = A\cos\delta \rightarrow \cos\delta = 0 \\ 0 > -A\omega\sin\delta \rightarrow \sin\delta > 0 \end{cases}$$

De nuevo, Nos hacemos la pregunta ¿cuál es en ángulo cuyo coseno nos da como resultado 0?

Es claro que la respuesta es $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$, cual escojemos entonces. La cuestión es que necesitamos que el $\sin\delta > 0$, es decir, necesitamos que sea positivo para que al máltiplicar por $-A\omega$ la velocidad sea negativa.

Luego el angulo que cumple con ambas condiciones es,

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

Por último, la amplitud corresponde a la máxima compresión que el bloque ejerce sobre el resorte luego de la colisión.

Usaremos los conceptos de energia para hallar dicha amplitud.

En el punto A la energia del bloque es solo energia potencial gravitacional. No hay energia cinética pues el bloque parte del reposo, su velocidad es cero.

Asi,

$$E_A = Mgh$$

Por otroa lado, la energia en el punto de maxima compresión del resorte solo hay energia potencial elastica No hay energia cinetica pues en la máxima compresión la velocidad de la masa M se hace cero.

Asi,

$$E_{x_{max}} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Por conservación de la energia tenemos que:

$$E_A = E_{x_{max}}$$

Sustituyendo,

$$Mgh = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \ldots\ldots (1)$$

Despejamos x_{max}

Multiplicamos (1) por 2

$$2Mgh = kx_{max}^2$$

Dividimos toda la ecuación por k

$$\frac{2Mgh}{k} = x_{max}^2$$

Aplicamos el operador Raiz cuadrada a la ecuación.

$$\sqrt{\frac{2Mgh}{k}} = |x_{max}| = A$$

Finalmente, la posición en función del tiempo viene como:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2Mgh}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Su velocidad es la derivada de la posición.

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

Es decir,

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{2Mgh}{k}}\sqrt{\frac{k}{M}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Simplificando,

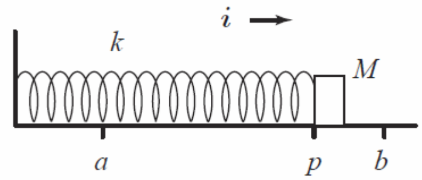
$$\dot{x}(t) = -\sqrt{2gh}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Nota importante: La parte B se deja como tarea.

Nota importante #2: Es importante a partir de ahora pensar en Energia. La usaras por el reto de tu vida xD

Problema #66

175. La figura muestra un resorte con un extremo atado a una pared y el otro a un bloque. El bloque tiene masa $M = 4$ kg, se apoya en una superficie horizontal lisa y su movimiento oscilatorio tiene como puntos extremos a los puntos a y b.



a. El bloque tarda un tiempo $t_{ab} = (1/5)$ s en recorrer la distancia $d_{ab} = 8$ m entre los puntos a y b. Halle la amplitud A, el período τ y la frecuencia angular ω del movimiento. Encuentre también la constante elástica k del resorte.

b. Tome nula la energía potencial en el punto de equilibrio del resorte. Halle la energía del sistema y la rapidez máxima del bloque.

c. En el instante $t = 0$ el bloque se encuentra en el punto p y moviéndose hacia la derecha. La distancia entre a y p es $d_{ap} = 3A/2$. Tome origen en el punto de equilibrio del resorte y halle la posición $x(t)$ y velocidad $\dot{x}(t)$ del bloque.

Solución parte A)

El bloque tiene como puntos extremos los puntos $a\ y\ b$. La distancia entre dichos puntos es 8(m). La amplitud es la distancia que hay desde la longitud natural hasta uno de sus extremos de maxima elongación o máxima compresion.

Asi,

$$8\ (m) = 2A$$

Por tanto,

$$A = \frac{8}{2}(m)$$

$$A = 4\ (m)$$

El periodo se define como el tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de la oscilación. Por ejemplo, suponga que la particula comienza su movimiento en a. Entonces su periodo será el tiempo que tarde en ir hasta b y regresar a a.

Nos informan que el tiempo en ir desde $a \to b = \frac{1}{5}s$. Por tanto, el tiempo que tarde en ir de $b \to a$ tambien es $\frac{1}{2}s$

Asi,

$$\tau = \frac{2}{5}(s)$$

La frecuencia angular ω se refiere a la frecuencia del movimiendo oscilatorio expresada en proporsión del cambio de ángulo. Se define como:

$$\omega = 2\pi f$$

Donde f representa el número de oscilaciones o vueltas por segundo que se realiza. Se define como:

$$f = \frac{1}{\tau}$$

Es decir,

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

Asi,

$$\omega = 2\pi \frac{5}{2}$$

$$\omega = 5\pi$$

Por último, la constante de elasticidad k puede ser calculada mediante la ecuación.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\omega^2 = \frac{k}{M}$$

Multiplicamos toda la ecuación por M

$$M\omega^2 = K$$

Asi,

$$k = 100\pi^2 \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)$$

Parte B) En el punto de equilibrio su energia potencial es elastica. Cumple la forma:

$$E = \frac{1}{2} kx^2$$

Asi,

$$E = \frac{1}{2} * 100 \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right) * 8(\mathrm{m}^2)$$

$$E = 800\pi^2 \mathcal{J}$$

La rapidez máxima se cumple cuando toda la energia potencial se tranforma en energia cinetica. Es decir, la energia potencial es cero, y la energia cinetica es máxima. Como cuando una pelota llega al piso lanzada desde una altura h.

$$E = U + K$$

Asi,

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Despejamos la rapidez multiplicando toda la ecuación por 2 , dividiendo entre m y aplicando el operador raiz a la ecuación.

$$|v_{max}| = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Sustituyendo,

$$|v_{max}| = \sqrt{\frac{2 * 800\pi^2}{4}} = \sqrt{400\,\pi^2}$$

$$|v_{max}| = 20\pi$$

Parte C) Sabemos que la ecuación que describe el movimiento oscilatorio es de la forma

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

Y la velocidad es de la forma,

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

Aquí, conocemos los valores de la amplitud y la frecuencia angular. Solo nos queda calcular la face.

Condiciones iniciales,

$$\begin{cases} x(0) = p \\ \dot{x} > 0 \; se\; mueve\; hacia\; la\; derecha. \end{cases}$$

Nos informan que la distancia desde a hasta p es tres medios de la amplitud.

$$d_{ap} = \frac{3A}{2}$$

Sustituyendo el valor de la amplitud tenemos que.

$$d_{ap} = \frac{3(4)}{2}$$

$$d_{ap} = 6$$

Luego, medimos p desde el punto de equilibrio. Esto es

$$d_{ap} = 6$$

$$d_{ax_0} = 4$$

$$d_{x_0 p} = 6 - 4 = 2$$

Es decir, el punto p esta a una distancia de dos metros desde el punto de equilibrio. Pues el punto de equilibrio se halla en $x_0 = 0$ a $4(\text{m})$ de a.

Asi, las condiciones iniciales son:

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ \dot{x} > 0 \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{cases} 2 = A\cos\delta \\ 0 < -A\omega\sin\delta \end{cases}$$

Sustityendo la amplitud y la frecuencia angular

$$\begin{cases} 2 = 4\cos\delta \\ 0 < -4 * (5\pi)\sin\delta \end{cases}$$

De aquí,

$$\begin{cases} \cos\delta = \frac{1}{2} \\ \sin\delta < 0 \end{cases}$$

$$\delta = \frac{5\pi}{3}$$

Asi,

$$x(t) = 4\cos\left(5\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\dot{x}(t) = -20\sin\left(5\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

Problema #67 Un pez de 15 kg, que nada a 1.10 m/s, de repente engulle un pez de 4.5 kg que estaba estacionario. Desprecie los efectos del arrastre del agua.

a) Calcule la rapidez del pez grande inmediatamente después de haberse comido el pequeño pez.
b) ¿Cuánta energía mecánica se disipo durante esta comida?

Solución. Parte A)

Usaremos los conceptos de colisiones para resolver este nuevo tipo de problemas. Dado que los peces "colisionan" (uno se come al otro) en ausencia de fuerzas externas (no hay rose con el agua, etc.). Podemos usar los conceptos de conservación del momento lineal.

$$\vec{P}_{antes} = \vec{P}_{después}$$

Es decir,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

Luego como el pez de masa dos (el de menor masa) estaba estacionado. Su momento es cero.

$$m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \ldots\ldots (1)$$

Como el pez de masa uno engulle al pez de masa dos, después de la comida la velocidad de los peces denotada por V mayuscula es la misma. Pues uno está dentro de otro.

$$V_1 = V_2 = V \ldots\ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$m_1 v_1 = m_1 V + m_2 V$$

Despejamos la variable V

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)V$$

$$V = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1$$

Sustituimos las cantidades numéricas.

$$V = \left(\frac{15\ kg}{(15 + 4.5)kg}\right) 1.10 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$V = 0.84 \left(\frac{m}{s}\right)$$

Parte B) Veremos cuanta energía se disipo. Lo podemos ver de dos formas: observando su diferencia o su cociente.

Vemos la energía mecánica antes y después del choque,

Antes,

$$k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Después,

$$k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$$

Por diferencia,

$$\Delta k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$$

Sustituyendo las cantidades numéricas.

$$\Delta k = \frac{1}{2} * (15) * (1.10)^2 - \frac{1}{2} * (15 + 4.5) * (0.84)^2$$

Se disipo,

$$\Delta k = 2.2\ \mathcal{J}$$

Problema #68

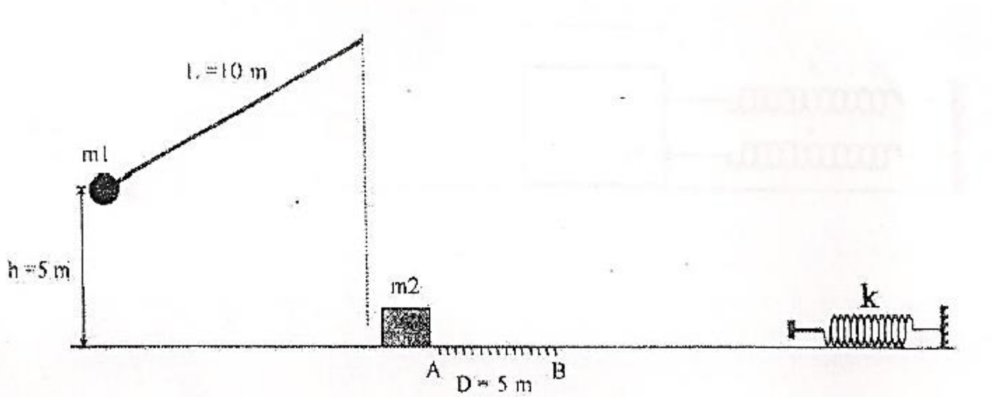
2.- Una esfera de masa m1 = 1kg se encuentra amarrada a un hilo liviano e inextensible de longitud L = 10 m. Inicialmente m1 se encuentra en reposo a una altura h = 5m, respecto a la horizontal. La masa m1 se suelta y en su altura mínima del recorrido choca **elásticamente** con un cuerpo de masa m2 = 3 kg que se encontraba en reposo sobre la superficie horizontal. Como resultado de la colisión el cuerpo m2 sale despedido hacia la derecha e impacta sobre un resorte de constante k = 100N/m. En el tramo AB, existe roce, entre el bloque y la superficie, donde el coeficiente de roce cinético es μ = 0.2.

El tramo AB mide 5 m. **Calcular:**

a) Las velocidades de m1 y m2 después de la colisión. (3 ptos)

b) La máxima compresión que alcanza el resorte después del impacto de m2. Tenga en cuenta que hay fricción en la superficie AB. (4 ptos)

c) La altura final que alcanza m1 después de haber chocado con m2. (3 ptos)



Solución. Realizamos una lista de las cantidades conocidas y las condiciones del problema.

DATOS						
$\boldsymbol{m_1}$	$\boldsymbol{m_2}$	$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{L}$	$\boldsymbol{u_k}$	$\boldsymbol{k}$
1 kg	3 kg	5 m	5 m	10 m	1/5	100 N/m
Condición de choque elastico Se cumple la conservación del momento lineal y la conservación total de la energia mecánica.						

Pregunta A) Observamos toda la energia **antes del choque**. En el punto de altura h la masa 1 solo tiene energia potencial que convierte en energia cinetica justo antes de chocar con la masa 2.

Asi,

$$E_h = mgh$$

$$E_A = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

Por conservación de la energia.

$$E_h = E_A$$

Asi,

$$mgh = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

De donde,

$$|v_1| = \sqrt{2gh} \ldots \ldots (1)$$

La ecuación uno nos da la rápidez de la masa 1 justo antes del choque con la masa 2.

Enfoquemonos sobre lo que sucede **durante el choque**: Por ser un choque elástico existen dos cantidades fisicas que se conservan antes, durante y despues del choque. El momento total y la Energia mecánica.

$$\vec{P}_{antes} = \vec{P}_{después}$$

$$E_{antes} = E_{después.}$$

Esto da lugar a un sistemas de ecuaciones que resolvere solo una vez.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \ldots \ldots (2)$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_1 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2 \ldots \ldots \ldots (3)$$

El de arriba es un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas $V_1 \, y \, V_2$. Es decir, las velocidades de las masas 1 y 2 después del choque.

Tomamos la ecuación (2) y agrupamos terminos semejantes

$$m_1 v_1 - m_1 V_1 = m_2 V_2 - m_2 v_2$$

Masas factor común a ambos lados de la igualdad.

$$m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2) \ldots\ldots..(4)$$

Por otro lado, totamos la ecuación (3) y simplificamos los terminos ½.

$$m_1 v_1^2 + m_1 v_2^2 = m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2$$

Agrupamos terminos de masa semejantes,

$$m_1 v_1^2 - m_1 V_1^2 = m_2 V_2^2 - m_2 v_2^2$$

Masas factor común a ambos lados de la igualdad.

$$m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2) \ldots\ldots(5)$$

Es decir, hemos pasado de las ecuaciones (2) y (3) a las ecuaciones (4) y (5)

$$m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2) \ldots\ldots..(4)$$

$$m_2(v_2^2 - V_2^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2) \ldots\ldots(5)$$

En la ecuación (5) observamos que es posible escribir los términos cuadraticos como un producto notable de la forma. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$(v_1^2 - V_1^2) = (v_1 - V_1)(v_1 + V_1)$$

$$(v_2^2 - V_2^2) = (v_2 - V_2)(v_2 + V_2)$$

Asi, la ecuación (5) es posible escribirla de la forma.

$$m_1(v_1 - V_1)(v_1 + V_1) = m_2(v_2 - V_2)(v_2 + V_2) \ldots..(6)$$

Viene la parte traumatica del asunto. Note que la la ecuación (4) nos dice que las cantidades$m_1(v_1 - V_1) \, y \, m_2(V_1 - v_1)$ son iguales, por tanto en la ecuación (6) dichas canditades puedes ser simplificadas.

$$m_1(v_1 - V_1)(v_1 + V_1) = m_2(v_2 - V_2)(v_2 + V_2) \ldots..(6)$$

$$(v_1 + V_1) = (v_2 + V_2) \ldots..(7)$$

Hemos eliminado los terminos cuadraticos del sistema de ecuaciones y ahora queda de la siguiente manera.

$$m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2) \ldots \ldots . . (4)$$

$$(v_1 + V_1) = (v_2 + V_2) \ldots . . (7)$$

Nota importante: las ecuaciones (4) y (7) son validas para choques en una dimensión. En dos o tres dimensiones el algebra es un poco (mucho) más complicado.

Para terminar, de la ecuación (7) despejamos V_2

$$V_2 = v_1 + V_1 - v_2$$

y sustituimos en (4)

$$m_1(v_1 - V_1) = m_2(v_1 + V_1 - v_2 - v_2)$$

Despejamos V_1

$$m_1(v_1 - V_1) = m_2(v_1 + V_1 - 2v_2)$$

Propiedad distributiva.

$$m_1v_1 - m_1V_1 = m_2v_1 + m_2V_1 - m_2 2v_2$$

Agrupamos los terminos que tienen V_1

$$-m_2V_1 - m_1V_1 = -m_1v_1 + m_2v_1 - m_2 2v_2$$

$$-(m_2 + m_1)V_1 = -m_1v_1 + m_2v_1 - m_2 2v_2$$

Multiplicamos toda le ecuación por -1

$$(m_2 + m_1)V_1 = (m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2$$

Dividimos toda la ecuación por $(m_2 + m_1)$

$$V_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2 \ldots \ldots (8)$$

Realizando el mismo procedimiento con V_2

$$V_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_2 + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 \ldots \ldots . . (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) son las expresiones más generales de los modulos de las velocidades de las particulas $m_1\ y\ m_2$ despúes de la colisión. Usted tiene dos opciones: aprende a deducirlas o hace uso de su maravillosa memoria. Recomiendo lo primero.

Sustituimos las cantidades conocidas $v_1 = \sqrt{2gh}$ y $v_2 = 0$ para nuestro caso particular.

$$V_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\sqrt{2gh}$$

$$V_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)\sqrt{2gh}$$

Sustituimos las cantidades númericas,

$$V_1 = \left(\frac{1-3}{1+3}\right)\sqrt{2*10*5}$$

$$V_2 = \left(\frac{2*1}{1+3}\right)\sqrt{2*10*5}$$

$$V_1 = -5\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$V_2 = 5\left(\frac{m}{s}\right)$$

Si tomamos un vector unitario $\hat{x}$ con dirección positiva hacia la derecha entonces,

$$\vec{V}_1 = 5(-\hat{x})\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\vec{V}_2 = 5(\hat{x})\left(\frac{m}{s}\right)$$

Pregunta B. Usaremos los conceptos de trabajo y energía para hallar la máxima compresión del resorte.

Después de la colisión el bloque de masa dos sale con una velocidad de 5 m/s hacia la derecha pasando por una zona áspera hasta detenerse en la máxima compresión del resorte.

Observemos la energia en el punto A después de la colisión.

$$E_A = \frac{1}{2}m_2V_2^2$$

Observemos que la energia en el punto x de compresión maxima del resorte es solo potencial pues esta bajo la acción del resorte. No tiene energia cinética ya que en dicho punto su velocidad es cero..

$$E_x = \frac{1}{2}kx^2$$

Como hay una zona áspera estamos bajo la presencia de una fuerza no conservativa. La fuerza de rose resta energia al sistema atraves del trabajo realizado por dicha fuerza. Calcularemos este trabajo y usaremos el teorema del trabajo y la energia para determinar la compresión máxima del resorte.

Realizamos un diagrama de cuerpo libre de la masa dos cuando esta atravezando la zona áspera. En el estudio de la dinámica aprendimos que bajo un regimen cinetico siempre se cumple que:

$$f_k = \mu_k N$$

Y en este caso en particular,

$$N = m_2 g$$

Asi,

$$f_k = \mu_k m_2 g$$

Luego como el desplazamiento es hacia la derecha y la fuerza de rose siempre se opone al movimiento relativo entre los cuerpos,

$$\vec{f}_k = \mu_k m_2 g(-\hat{x})$$

Por definición,

$$W_{NC}^{A\to B} = \int_A^B \vec{f}_k \cdot \vec{dl}$$

Donde,

$$\vec{dl} = dx(\hat{x})$$

Entonces,

$$W_{NC}^{A\to B} = \int_A^B \mu_k m_2 g(-\hat{x}) \cdot dx(\hat{x})$$

Realizamos el produto punto,

$$W_{NC}^{A\to B} = \int_A^B -\mu_k m_2 g dx$$

Integramos,

$$W_{NC}^{A\to B} = -\mu_k m_2 g x|_A^B$$

Usamos el teorema fundamental del calculo,

$$W_{NC}^{A\to B} = -\mu_k m_2 g x(B - A)$$

Sustituimos $B - A = D$

$$W_{NC}^{A\to B} = -\mu_k m_2 g x D$$

El teorema del trabajo y la energia postula que “el trabajo realizado en una trayectoria cualquiera por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de energia total del sistema”

$$W_{NC}^{A\to x} = \Delta E_{Ax}$$

Sustiuyendo las cantidades calculadas anteriormente,

$$-\mu_k m_2 g x D = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}m_2 V_2^2$$

Multiplicamos toda la ecuacíon por 2

$$-2\mu_k m_2 g x D = kx^2 - m_2 V_2^2$$

Sumamos a ambos lados $m_2 V_2^2$

$$m_2 V_2^2 - 2\mu_k m_2 g x D = kx^2$$

Dividimos toda la ecuación por k

$$\frac{m_2 V_2^2 - 2\mu_k m_2 g x D}{k} = x^2$$

Aplicamos el operador raiz cuadrada a ambos lados de la igualdad.

$$\sqrt{\frac{m_2 V_2^2 - 2\mu_k m_2 g x D}{k}} = |x|$$

Sustituimos las cantidades númericas,

$$\sqrt{\frac{3 * (5)^2 - 2 * \left(\frac{1}{5}\right) * (3) * (10) * (5)}{100}} = |x|$$

$$|x| = \frac{\sqrt{15}}{10}\ (\mathrm{m})$$

$$|x| \approx 38.7\ (\mathrm{cm})$$

Parte c) De nuevo usaremos los conceptos de energia para calcular la altura maxima a la que llega el bloque de masa uno despues de haber sido disparado hacia la izquierda con una rapidez de 5 m/s . Este caso es mucho más sencillo porque despues de la colisión sobre el bloque de masa uno solo actuan fuerzas conservativas.

Observemos que la energia en el punto A después de la colisión es solo cinética pues hemos medido durante todo el ejercicio la energia potencial gravitacional desde la base de la plataforma.

$$E_A = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

En el punto de maxima altura toda la energia cinetica se ha conventido en energia potencial gravitacional.

$$E_{h_{max}} = m_1 g h_{max}$$

Por conservación de la energia,

$$E_A = E_{h_{max}}$$

Es decir,

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 = m_1 g h_{max}$$

Dividimos toda la ecuación por $m_1 g$

$$\frac{V_1^2}{2g} = h_{max}$$

Sustituimos las cantidades númericas,

$$\frac{5^2}{2 * 10} = h_{max}$$

Finalmente,

$$h_{max} = \frac{5}{4} (\text{m})$$

$$h_{max} = 1.25 \ (\text{m})$$

Fin.